*

En teori om handlinger og handlingsalternativer.

*

Morten Rognes

1994

*

INNHOLD

§0 Innledning. 5
§1 Forkunnskaper. 7
§1.1 Grunner for den formaliserte fremstillingsmåten. 7
§2 Fremstilling av handlingsteorien HT 7
§3 Handlingsbegrepet i teorien HT 14
§4 Eksempler på handlinger og handlingsalternativer. 29
§5 Teoremer i teorien HT 34
§5.1 Satser om relasjonene Br og M. 34
§5.2 Satser som belyser egenskapene til relasjonene Re og Alt. 37
§5.3 Om de krav som bør stilles til relasjonen M. Er operatoren "Utsagnet at p beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t" en modaloperator? 41
§5.4 Satser som kaster mer lys over forholdet mellom

relasjonene Alt og Re og "makt"-relasjonen M. 45
§5.5 Satser som kan kaste et visst lys over spørsmålet om hvorvidt en aktørs handlingspotensiale er lukket under negasjons-operasjonen. 50
§6 Prawitz og Bergstrøm om handlingsalternativer. 55
§7 Konsistensbevis og modeller for teorien HT. 70
§8 Oppsummering og konklusjon. 84

Kråkerøy 30-8-1994

FORORD

Hovedidéene bak handlingsteorien HT, som defineres og undersøkes i dette skrift, går tilbake til et sett av notater jeg utarbeidet i begynnelsen av 80 - årene. Jeg har ikke notert datoen, men det er er mest sannsynlig at de stammer fra 1980 -1981. Bakgrunnen for disse notatene var en diskusjon mellom Lars Bergstrøm og Dag Prawitz, i tilknytning til Bergstrøms bok "The alternatives and consequences of actions", om analysen av begrepet handlingsalternativ. Å gi en tilfredsstillende analyse av dette begrep synes viktig av mange grunner, men de bemerkelsesverdige vanskeligheter som forfatterene med stor stor skarpsindighet drøftet virket foruroligende. Det var derfor min hensikt å gi et bidrag til denne diskusjonen. Det foreliggende arbeid kan oppfattes som et forsøk på å klargjøre og løse en del av de problemer Prawitz og Bergstrøm diskuterte.

Høsten 1991 tok jeg disse notatene for meg på nytt og begynte å renskrive og bearbeide dem. Resultatet ble stort sett §2 og §5 i dette skrift. Analysen av begrepet handling i §3 og konsistensbeviset for teorien HT, som presenteres i §7, ble også utarbeidet utarbeidet denne høsten. §6, som inneholder det jeg har å si i forbindelse med Prawitz - Bergstrøm debatten, ble skrevet våren 1993. Det samme gjelder §4. Arbeidet i sin foreliggende form ble gjort ferdig i løpet av sommeren 1994.

Dette arbeid er ikke skrevet med tanke på offentliggjørelse. Det er også tvilsomt om jeg vil gjøre noen forsøk på å få det offentliggjort i den form som det nå foreligger. Enhver som får i hende et eksemplar av dette skrift uten min skriftelige tillatelse bør derfor levere det tilbake. Det er også mot min vilje at man henviser til, eller siterer fra, deler av dette arbeid, uten at man på forhånd har innhentet min tillatelse.

Morten Rognes

En teori om handlinger og handlingsalternativer.

§0 Innledning.

I dette arbeidet skal vi fremstille hovedtrekkene i en teori om handlinger og handlingsalternativer. Teorien er av en tentativ karakter og vi vil etterhvert gi en fullstendig, formell og eksplisitt fremstilling av den.

En slik teori om handlingsalternativer er av interesse av forskjellige grunner. Det synes å være et vanlig synspunkt innen etikken at man bør velge det alternativ blandt alle dem som står åpne for en ved et gitt tidspunkt som etisk sett er best, og hvis det eventuelt er flere alternativer som står åpne og som er like gode synes det fra en etisk synsvinkel å være slik at man er forpliktet til å velge et av disse likeverdige alternativene. Spørsmålet oppstår derfor når et alternativ etisk sett er bedre enn et annet, videre om f. eks. når et alternativ skal oppfattes som etisk sett påbudt, forbudt eller tillatt. Å si noe klargjørende om dette, - hvis det da i det hele tatt er mulig -, er en av etikkens oppgaver og vi skal ikke beskjeftige oss med det her. Men det synes nærliggende i en slik forbindelse å se litt nærmere på det man som fra en etisk synsvinkel bør velge mellom og kanskje faktisk velger mellom, nemlig handlingsalternativene. Det er delvis av denne grunn at vi her tar opp spørsmålet om hva et handlingsalternativ er og forsøker å formulere en teori om dette.

Det er også en annen grunn til å ta opp spørsmålet om handlingsalternativer. Det synes ikke helt søkt å hevde at hvis to eller flere handlingsalternativer står åpne for en person ved et gitt tidspunkt så må det være slik at det står i denne personens makt å realisere såvel det ene som det andre av disse alternativene. Mao. , er to eller flere handlingsalternativer åpne for en person synes det å følge at vedkommende kan velge fritt mellom dem, og omvendt virker det rimelig å hevde at dersom en person kan velge fritt i en gitt situasjon så må minst to handlingsalternativer stå åpne for vedkommende. Det synes således å være en viss sammenheng mellom handlingsalternativer og frihet. Det virker derfor naturlig å tro at dersom man kan kaste noe lys over det første vil man også kunne kaste noe lys over det siste. Disse overveielser utgjør også et motiv for å formulere en teori om handlingsalternativer.

La oss nå, etter disse innledende bemerkninger, i første omgang gi et resymé av teorien uten bruk av symboler eller formalisering. Vi skal senere gi en fullstendig formalisert fremstilling av teorien og undersøke endel av dens formelle egenskaper.

Teoriens hovedtanke kan fremstilles på den følgende måte. Vi gir først to definisjoner: Med en teorifamilie over en mengde forstår vi en funksjon som til hvert element i mengden tilordner en mengde med utsagn. Vi gjør oppmerksom på at vi her med en teori mener en hvilken som helst mengde med utsagn. Med konsekvenssystemet til et utsagn a forstår vi mengden av alle de utsagn som logisk sett er implisert av a. La oss med *handlingspotensialet* til en person ved et gitt tidspunkt t i en logisk mulig verden w forstå teorifamilien som til ethvert utsagn som beskriver et forhold som det står i personens makt å realisere fra og med tidspunktet t i denne verdenen w, tilordner konsekvenssytemet til dette utsagn. Med en *basis* for en teorifamilie forstår vi en ikke-tom delmengde av teoriene i familien som oppfyller de følgende krav: For det første skal alle teoriene i delmengden være innbyrdes logisk uforenlige. For det andre skal enhver teori i familien være implisert av en eller annen teori i delmengden. For det tredje skal det ikke finnes noe teori i mengden som strengt impliserer noe teori i delmengden. At en teori strengt impliserer en annen innebærer da at den første impliserer den andre, men at den andre ikke impliserer den første.

Det kan bevises at hvis en teorifamilie har en basis er denne entydig bestemt.

Teorien inneholder to hovedpåstander: Den første er at dersom handlingspotensialet til en person relativt til et gitt tidspunkt t i en mulig verden w er ikke-tomt finnes det en basis

for dette handlingspotensiale. Den andre påstanden er at et handlingsalternativ som står åpent for en person ved et gitt tidspunkt i en bestemt mulig verden er et element i den teorimengden som er en basis for personens handlingspotensial ved dette tidspunkt i denne verden, og omvendt,- dersom noe, la oss si h, er et element i den teorimengden som er en basis for personens handlingspotensial ved et gitt tidspunkt i en bestemt mulig verden så er dette h et handlingsalternativ som står åpent for vedkommende ved dette tidspunktet i denne mulige verden. Det følger fra denne påstand at et handlingsalternativ er en teori i den betydning som ble fastlagt ovenfor.

La oss med den totale livsløpsbeskrivelse til en person i en logisk mulig verden forstå klassen av alle de utsagn som beskriver forhold som personen realiserer i denne verden. Ved siden av hovedpåstandene som så er langt nevnt inneholder teorien også en rekke antagelser om den totale livsløpsbeskrivelse til en person i en gitt mulig verden. For det første påstår teorien at hvis et utsagn er med i den totale livsløpsbeskrivelse til en person i en mulig verden så er også ethvert utsagn som er implisert av dette utsagn med i denne totale livsløpsbeskrivelse. For det andre påstår teorien at om en mengde med utsagn er inkludert i den totale livsløpsbeskrivelse til en person i en mulig verden så er konjunksjonen av alle utsagnene i denne mengden et element i den totale livsløpsbeskrivelse. Disse to påstander innebærer at den totale livsløpsbeskrivelse til en person i en mulig verden utgjør det man kan kalle en deduktivt lukket utsagnsmengde. For det tredje påstår teorien at den totale livsløpsbeskrivelse til en person i en mulig verden utelukkende inneholder utsagn som er sanne i denne verden.

Teorien hevder videre at det er en viss sammenheng mellom handlingsalternativer og livsløpsbeskrivelse. For det første sier teorien at av alle de handlingsalternativer som står åpne for en person ved et bestemt tidspunkt i en logisk mulig verden w vil konjunkjonen av et av dem være med i livsløpsbeskrivelsen til personen i denne verdenen. For det andre hevder teorien at hvis h er et handlingsalternativ som står åpent for en person ved et gitt tidspunkt i en logisk mulig verden w finnes det alltid en, - muligens distinkt -, verden w' hvor personen har de samme handlingsalternativer ved tidspunktet som i w og hvor konjunksjonen av h er med i den totale livsløpsbeskrivelse til personen i verdenen w'.

I tillegg til de påstandene som så langt er nevnt inneholder også teorien endel setninger som sier noe mer om det vi kan kalle handlingsmulighetene til et individ ved et bestemt tidspunkt i en mulig verden. Med handlingsmulighetene til et individ ved et gitt tidspunkt i en bestemt mulig verden forstår vi mengden av alle de utsagn som beskriver forhold det står i dette individs makt å realisere relativt til dette tidspunktet i denne mulige verdenen. Den viktigste påstand i denne forbindelse er at om et utsagn x er med i handlingsmulighetene til en person ved et gitt tidspunkt er også alle mulige utsagn som er implisert av x med blandt disse handlingsmulighetene.

Dermed har vi gjort rede for hovedtrekkene i teorien. La komme med visse ytterligere opplysninger om hva vi vil forsøke å gjøre i dette skrift.

I det følgende skal vi formalisere den teori vi har gitt et uformelt omriss av ovenfor. I §1 gir vi en redegjørelse for den litteratur som vi forutsetter kjent før lesningen. I §2 gjør vi rede for språket til teorien og de viktigste ikke-logiske aksiomene i den. I §3 betrakter innfører vi en definisjon av predikatet "x er en mulig handling" og drøfter denne i detalj. I §4 gjør vi et forsøk på å utdype og eksemplifisere de begrepsdannelsene vi har innført i §2 og §3. I §5 gir vi så en full fremstilling av teorien og utleder ca. 30 satser som gjelder for grunnbegrepene i den. I §6 relaterer vi teorien til en debatt mellom Bergstrøm og Prawitz om nettopp handlingsalternativer og utilitarisme. I §7 gir vi så et bevis for at teorien er konsistent ved å fremlegge en modell for den. Endelig inneholder §8 en oppsummering av de viktigste resultatene i dette skrift.

§1 Forkunnskaper.

Teorien vi skal gi en fremstilling av her er en utvidelse av egenskapsteorien E;3 som er formulert i Rognes [4] og Rognes [5]. Denne egenskaps-teorien er i sin tur en utvidelse av en teori om utsagn som er gitt i Rognes [2]. Begge disse arbeidene bygger på Rognes [1] hvor den logiske og mengdeteoretiske nota-sjon vi benytter blir innført helt presist. I det følgende forutsettes det at leseren er fortrolig med de skrifter som er nevnt og har satt seg inn i dem. Den notasjon og de begrepsdannelser som er innført i de nevnte verk vil derfor bli brukt uten videre og uten at vi her rekapitulerer og på ny motiverer tidligere definisjoner. Vi gjør dette fordi det neppe kan ha noen spesiell hensikt at det er stor overlapping mellom flere av våre arbeider, men også fordi vi ikke vil trette leseren med detaljer som vi har gjort nøye rede for andre steder. Når det gjelder den notasjon av logisk og mengdeteoretisk art som benyttes i dette skrift er den forklart Appendix I. *Vi anbefaler at leseren kopierer dette appendiks og har det oppslått ved gjennomlesningen av dette arbeid.* Det vil da være adskillig lettere å få tak i betydningen til et symbol som man støter på, og som man med en gang ikke skjønner betydningen til, enn om man stadig skal slå opp.

§1.1 Grunner for den formaliserte fremstillingsmåten.

Vi har i dette arbeid valgt å gi en sterkt formalisert fremstilling av den teorien vi vil undersøke. En nærmere motivasjon for den sterkt formelle fremgangsmåte, dvs. det forhold at vi formulerer teorien eksplisitt som en første-ordens teori er derfor på sin plass. Det er en rekke grunner som kan nevnes til fordel for denne fremstillingsmåte:

For det første bidrar en slik fremstillingsmåte til at man får en fullstendig oversikt over hvilke predikater som er primitive predikater i teorien og hvilke som er definerte. Dette er i sin tur viktig fordi man da (a) tydeligere kan se hvilke deler av teorien som eventuelt vil falle vekk som meningsløse om man oppfatter noen av predikatene i det ikke-logiske vokabularet som meningsløse. Oppfatter man f.eks. uttrykket "x er en mulig verden" som vitenskapelig sett uten noen klar mening, er det helt åpenbart, slik vi har fremstilt teorien HT, at alle de setningene som inneholder denne konstruksjonen må anses som uten klar vitenskapelig mening. Dette vil f.eks. gjelde alle de teoremene som utledes i §5. (b) Gjør man et eksplisitt skille mellom de konstruksjoner som innføres uten definisjon og de som innføres ved definisjoner blir det også lettere å gi en vurdering av de definisjonene man gir, dvs. vurdere i hvilken grad de er dekkende eller ikke.

For det andre er det slik at en eksplisitt formalisert fremstilling av en teori gjør det enklere å se hvilke av de setninger som inngår i den som ikke bevises i selve teorien. Videre gjør en slik fremstillingsmåte det mindre komplisert å se hva som logisk sett følger fra teorien. Dette i sin tur er åpenbart fordelaktig om man vil undersøke om teorien strider mot andre setninger man finner akseptable og i så tilfelle om teorien bør modifiseres. En helt eksplisitt fremstillingsmåte vil også gjøre det lettere å se hvilke av de grunnleggende setninger i teorien som må endres eller fjernes om man oppdager en konflikt mellom noen av teoriens setninger og andre setninger som eventuelt må aksepteres som sanne.
Kort sagt kan man si at en helt eksplisitt fremstilling har den fordel at det blir lettere å foreta en kritisk vurdering av teorien og å se svakheter ved den.

§2 Fremstilling av handlingsteorien HT

I det følgende betegner "L;e" språket for mengdelære slik dette er definert i Rognes[1]. L;e er følgelig det første-ordens språket som ved siden av de vanlige logiske

konnektiver (inkludert identitet) bare inneholder to ikke-logiske konstruksjoner, nemlig

(2.1) " x er en mengde" , som vi forkorter med "Mng(x)"
(2.2) " x er et element i mengden y" som vi som vanlig forkorter med "xêy".

"L;e(D)" betegner her språket til egenskapsteorien E;3. Dette er en utvidelse av språket L;e, - språket for mengdelære-, med de følgende konstruksjoner:

(2.3) " x er en mulig verden". Denne konstruksjon forkorter vi med "MV(x)".
(2.4) "w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant". I forbindelse med denne konstruksjonen bruker vi forkortelsen "True(w,x)".
(2.5) "x er et utsagn". Her benytter vi forkortelsen "Ut(x)".
(2.6) " x er en egenskap av grad y". Vi forkorter denne konstruksjonen med "At(x,y)".
(2.7) "x er et mulig individ" som forkortes med "MI(x)" og endelig
(2.8) "x har egenskapen y i verdenen w" som forkortes med "H(x,y,w)".

De predikatene som vi nå har nevnt er de eneste primitive konstruksjonene av ikke-logisk karakter som inngår i E;3. Vi minner forøvrig om at ZFCu(L;e(D)) er den første-ordens teorien hvis ikke-logiske aksiomer er alle ZFCu-aksiomene i L;e(D). E;3 er en utvidelse av denne teori med en rekke nye aksiomer for konstruksjonene (2.3)-(2.8). Disse aksiomene er angitt i Rognes [4] og vi skal ikke lage noen liste eller gi noe resymé av dem her.

Den handlingsteorien som vi nå etterhvert skal studere nærmere er en utvidelse av E;3 på to måter. For det første utvider vi språket til E;3 , ie.L;e(D) , med ytterligere primitive predikater. For det andre utvider og beriker vi teorien E;3 med en del aksiomer for de nye konstruksjonene vi innfører.

La oss først se på den utvidelsen av språket til E;3 som vi har i tankene. Denne fremkommer ved å utvide det ikke-logiske vokabular til E;3 med de følgende konstruksjoner:

(2.9) "x er en mulig person".Vi skal i dette arbeid forkorte dette primitive predikat med "P(x)".
(2.10) " x er et tidspunkt". Denne konstruksjonen skal vi forkorte med "Tp(x)".
(2.11) "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y". Vi bruker her "x <;f y" som forkortelse.

Forøvrig gjør vi i denne forbindelse oppmerksom på at vi uformelt bruker "t;0","t;1", "t;2",... etc. som variabeltegn som utelukkende tar tidspunkter som verdier. De to viktigste nye konstruksjonene er imidlertid:

(2.12) "x er et utsagn som beskriver et forhold som y realiserer i verdenen w". Denne forkorter vi med "Br(x,y,w)"
(2.13) "x er et utsagn som beskriver et forhold som det står i y´s makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w". I forbindelse med denne konstruksjon gjør vi bruk av uttrykket "M;t(x,y,w)" som forkortelse.

Dette avslutter listen over predikater som vi i første omgang vil berike språket til E;3 med.

I det følgende betegner D mengden som inneholder predikat-konstruksjonene (2.3) - (2.8) og bare dem. Som tidligere nevnt betegner "L;e" språket for mengdelære. "L;e(D)" betegner da det språket vi får når det ikke-logiske vokabularet til L;e utvides med predikatkonstruksjonene i D. I denne artikkelen skal "D;h" betegne mengden som inneholder konstruksjonene (2.3)-(2.13). Vi har altså at D;h inkluderer D, mao. at D Inkl D;h . Språket til handlingsteorien vi skal betrakte vil da være L;e(D;h). Man ser at dette språket er en utvidelse av L;e(D). Det følger at alle formlene i L;e, såvel som L;e(D), vil være formler i L;e(D;h).

Vi skulle nå være istand til å angi grunnsetningene i den handlingsteorien vi ønsker å studere. La oss først bare nevne at teorien er en første-ordens teori og at språket er det vi har nevnt overfor, nemlig L;e(D;h). For å definere teorien presist er det følgelig tilstrekkelig å fiksere de ikke-logiske aksiomene i den. Disse aksiomene er dem vi nå nevner.

(a) Alle ZFCu-aksiomene i L;e(D;h). Merk her at det ikke er tilstrekkelig å bare ta med alle ZFCu-aksiomene i L;e. Vi må også ta med alle instanser av utsondrings- og replacement-aksiomskjemaene i L;e(D;h).

(b) Alle E;3-aksiomene i L;e(D;h). Vi vil ikke gi et detaljert resymé av dem her, men henviser til arbeidet Rognes [4] hvor de er presist og detaljert formulert. Alle E;3-aksiomene er forøvrig lukkede formler i L;e(D) og derfor a forteriori i L;e(D;h).

(c) De følgende aksiomer som vi nå skal angi og kortfattet gjøre rede for.

La oss imidlertid før vi presenterer de ikke-logiske aksiomene i teorien som dreier seg om konstruksjonene (2.9) - (2.13), nevne en del forhold som har med utsagn å gjøre.

Vi gjør oppmerksom på at U i dette skrift betegner mengden av alle presise deskriptive utsagn. Dette innebærer at vi har U = Mg(x: Ut(x)). Klassen av alle de mulige verdener hvor et utsagn x er sant betegner vi med s(x) og kaller denne mengden for sannhetsmengden til utsagnet. Vi har altså, i det "True(w,x)" forkorter "w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant", at sannhetsmengden til et utsagn x, s(x), er Mg(w: wêI &True(w,x)). Videre gjør vi oppmerksom på at s er den funksjonen som til ethvert utsagn x tilordner sannhetsmengden til x. s er formelt definert slik : s = Mg(<x,Mg(w:wêI & True(w,x))> : xêU). I teorien E;3, som vi her forutsetter som en del av den teorien vi er i ferd med å beskrive kan man vise at s er en en-entydig avbildning av U på potensmengden av I, dvs. mengden av alle mengder av mulige verdener. Dette innebærer at det til enhver mengde med mulige verdener, la oss si a, finnes et entydig bestemt utsagn x som har denne mengden a som sin sannhetsmengde. I det følgende bruker vi s;-1 for å betegne den omvendte funksjon til s. s;-1 er følgelig den funksjonen som til enhver mengde med mulige verdner tilordner det utsagn om har denne mengden som sin sannhetsmengde.

Vi skal nå se på grunnsetninger i vår teori for predikat-konstruksjonene "M;t(a,x,w)" og "Br(a,x,w)" som jo er de konstruksjonene som, ved siden av de "tidsteoretiske" predikatene (2.10) og (2.11) samt predikatet "P(x)", skiller L;e(D) fra L;e(D;h).

De første setningene vi betrakter i denne forbindelse er:

AT 0.1 (Br(a,x,w).->.aêU & P(x) & wêI) &
(M;t(a,x,w).->.aêU & P(x) & wêI &Tp(t))

og

AT 0.2 Mng(Mg(x: Tp(x))) & Mng(Mg(x: P(x)))

Den første av disse to setningene uttrykker at hvis a er et utsagn som beskriver et forhold x realiserer i verdenen w så er a et utsagn, x en person og w en mulig verden. Videre sier setningen at hvis a er et utsagn som beskriver et forhold det står i x´s makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w så er

a,x,t,w henholdsvis et utsagn, en person, et tidspunkt og en mulig verden. Hva setningen uttrykker synes altså å være en triviell påstand som ikke skulle behøve ytterligere kommentarer.

AT 0.2 sier at Mg(x;Tp(x)) og Mg(x: P(x)) er mengder og eksisterer i det kumulative hierarki. Det bør bemerkes at vi trenger dette aksiomet; for uten dette, og bare på basis av de mengdeteoretiske aksiomene som vi så langt har nevnt, er vi ikke i stand til å bevise f.eks. setninger som (Ey)(y=Mg(x: Tp(x))) og
(Ey)(y=Mg(x: P(x))). Disse setningene synes det naturlig å forvente at skulle være utledbare i vår teori.

Den neste grunnsetningen er:

AT 1 Br(a,x,w).->. wês(a)

Det dette aksiomet uttrykker er at hvis a er et utsagn som beskriver noe x realiserer i verdenen w så er utsagnet sant i verdenen w.

Dernest betrakter vi:

AT 2 zêU & s(SNu(Mg(x:Br(x,y,w)))) Inkl s(z) & wêI & P(x):
->.Br(z,y,w)[1]

La oss forsøke å gjøre rede for innholdet i denne setningen, hva setningen uttrykker.

Studerer man nå AT 2 uttrykker antesedenten at z er et utsagn og at snittet av sannhetsmengdene til alle de utsagn som beskriver forhold y realiserer i verdenen w er inkludert i sannhetsmengden til z. Konsekventen i AT 2 uttrykker at z er et utsagn som beskriver et forhold y realiserer i verdenen w. Mao. snittet av enhver mengde med utsagn som beskriver forhold en person realiserer i en gitt verden w vil altså selv være et utsagn som beskriver et forhold vedkommende realiserer i verdenen w.

Før vi presenterer vårt neste aksiom nevner vi at uttrykket "Br*(a,x)" er definert ved :

Br*(a,x)=s;-1[Mg(w: Br(a,x,w) & wêI)]

Er a et utsagn og x en person fremgår det fra denne definisjonen at Br*(a,x) er det utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene hvor det er slik at a beskriver et forhold x realiserer. Mao. kan man si at Br*(a,x) er identisk med utsagnet at a beskriver et forhold x realiserer. Den følgende setning sier da at hvis a beskriver et forhold x realiserer i verdenen w så vil også Br*(a,x) beskrive et forhold x realiserer i denne verdenen w.

---

[1] Vi gjør oppmerksom på at uttrykket "konjunksjonen av alle utsagnene i mengden X ", i symboler "SNu(X)", er definert slik:

SNu(X)= (iu)(uêU & s(u)=IΩSn(Mg(s(y):yêX)))
= (iu)[uêU & s(u)=IΩMg{w: (Ay)(yêX.->.wês(y))}]

Man ser fra denne definisjonen at SNu(X)=(iu)(uêU &s(u)=I) om X er den tomme mengden.
I teorien T er den følgende formel et teorem:

(1) (AX)(Mng(X) & X Inkl U.->. (Ey)(y=SNu(X)))

Det bør bemerkes at vi har føyd til "Mng(X)" som en klausul i antesedenten her fordi det ikke følger, i teorien T, at a er en mengde fra en sann setning av typen "a Inkl b". Er a et urindivid vil nemlig enhver slik setning være trivielt sann. Grunnen er denne:

Vi har (2) a Inkl b. h&h. (Ax)(xêa.->.xêb). Dette følger fra den definisjon vi har gitt av "a Inkl b". Anta a er et urindivid. Da har vi per definisjon,
(3) ¬Mng(a). Nå har vi at mengdeaksiomet , som inngår i ZFCu og derfor i teorien T, sier at (4) (Ax)(Ay) (xêy.->. Mng(y)) . Men fra (3) og (4) ser man at det følger at (5) ¬(Ex)(xêa). (5) impliserer imidlertid i lys av ren predikatlogikk (Ax)(xêa.->.xêb) uansett hva b måtte være. Fra dette og (2) følger a Inkl b. Den følgende sats holder derfor i T :

(6) (Ab)(Aa)((¬Mng(a)).->,a Inkl b).

Det er av denne grunn vi har føyd til forbeholdet om at X skal være en mengde i formelen (1).

AT 3 Br(a,x,w). -> .Br(Br*(a,x),x,w)

Merk at det fra definisjonen ovenfor følger at Br*(a,x)êU, dvs. at Br*(a,x) er et utsagn. Setningen AT 3 er ikke spesielt innlysende. Men vi vil utsette en nøyere drøftelse av den til senere.[2]

Er a et utsagn som beskriver et forhold det står i x´s makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w og er det videre slik at utsagnet a logisk sett impliserer utsagnet b virker det ikke urimelig å påstå at også b beskriver et forhold som det står i x´s makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w. Denne antagelsen er innholdet i den følgende grunnsetning:

AT 4 M;t(a,x,w) & bêU & s(a) Inkl s(b). ->. M;t(b,x,w).

Innfører vi uttrykket "N;t(a,x,w)" ved den følgende definisjon:

DEFINISJON 2.1: N;t(a,x,w) = ¬(M;t(Neg(a),x,w))

er det forholdsvis enkelt å vise at vi har :

N;t(a,x,w) & s(a) Inkl s(b) & a,bêU .->. N;t(a,x,w).

Vi skal imidlertid ikke bevise dette akkurat her, men vil ta opp til drøftelse egenskapene til relasjonen "M;t(a,x,w)" mer utførlig senere.

La oss se litt nærmere på den følgende setning:

(**) M;t(a,x,w) & M;t(b,x,w) & Br(K(a,b),x,w).->.M;t(K(a,b,),x,w).

Det denne setningen uttrykker er at dersom a og b er to utsagn som beskriver forhold som det står i x`s makt å realisere relativt til tidspunktet t og det dessuten er slik at konjunksjonen av a og b beskriver et forhold som x faktisk realiserer i verdenen w så vil også denne konjunksjonen av a og b beskrive et forhold som det står i x`s makt å realisere relativt til tidspunktet t. Denne setningen kan ikke karakteriseres som helt innlysende, men den synes heller ikke å være uten enhver plausibilitet. Det beste ville kanskje være å gi den en status av hypotese som vi føyer til i antesedenten i de teoremer der vi har bruk for den. Det er forøvrig å bemerke at dette aksiomet er det eneste av dem som vi så langt har presentert som forbinder de to predikatkonstruksjonene "M;t(a,x,w)" og "Br(a,x,t)". Dette gjør at det har en viss interesse å betrakte den. Imidlertid skal vi ikke drøfte denne setningen nærmere akkurat her, men komme tilbake til den når vi gir et konsistensbevis for teorien i §7. Det som kan nevnes er at i den modellen vi stiller opp der holder ikke denne setningen, mens derimot de andre aksiomene vi presenterer holder. Siden modellen synes å fange inn visse trekk som tilsynelatende kan tilskrives den naturlige modellen er det nærliggende å se på setningen ovenfor med en viss skepsis.

Når det gjelder de neste aksiomene i teorien, som vi nå etterhvert skal angi, trenger vi endel rent tekniske begreper. Vi innfører først uttrykket "C(w,y,t)" ved den følgende definisjon:

DEFINISJON 2.2: C(w,y,t)=Mg(x: M;t(x,y,w))

Dessuten innfører vi operasjonen k definert ved:

DEFINISJON 2.3: k(q)=SN[Mg(X: X Inkl U & q Inkl X &

---

[2] En teori om operatoren "x ser til at ..." som har en viss forbindelse med teorien ovenfor, representert ved aksiomene AT 1 - AT 3 er utformet i Chellas [1], side 62 -69. Når det ellers gjelder arbeider i handlingslogikk og deontisk logikk henviser vi til de arbeider av von Wright som er oppført på litteraturlisten.

(AZ)(Z Inkl X .->.(Ay)(s(SNu(Z)) Inkl s(y).->.yêX)))]

Er qê U kalles k(q) for konsekvenssystemet til q. Dette kan forsåvidt defineres på en enklere måte, nemlig slik:

DEFINISJON 2.4: k(q) = Mg(y: s(SNu(q)) Inkl s(y))

Videre definerer vi uttrykket "Q(w,y,t)" ved:

DEFINISJON 2.5: Q(w,y,t)= <k({a})>/aê C(w,y,t)/.

La oss gjøre oppmerksom på at vi med en "teori" forstår en hvilken som helst mengde med utsagn. Q(w,y,t) er derfor en teorifamilie siden
(Q(w,y,t)[a]) Inkl Pt(U) for alle objekter a der aê C(w,y,t).

Vi gir den følgende formelle definisjon av uttrykket "teorifamilie":

Med en teorifamilie over mengden X forstås en funksjon i mengden Exp(Pt(U),X). La nå T være en teorifamilie over mengden X og anta
Cê Pt(Pt(U))). Vi sier da at C utgjør en basis av uavhengige teorier for T hvis og bare hvis T og C oppfyller de følgende krav:

(o) CêPt(Pt(U))
(i) (Ax)(xêC.-> (s(SNu(x)) ≠ø)
(ii) C≠ø & C Inkl Rgn(T)
(iii) (Ay)[yê Rgn(T).->. (Ex)(xêC & (s(SNu(x)) Inkl s(SNu(y)))]
(iv) (Ax)[xêC.->. -(Ey)(yê Rgn(T) & s(SNu(y)) SInkl s(SNu(x)))]
(v) (Ax)(Ay)[x,y êC & x≠y .-> s(K(SNu(x),SNu(y)))=ø]

Vi skal i det følgende skrive " Bas(C,T)" som forkortelse for " C utgjør en basis av uavhengige teorier for T".

TEOREM 2.1 : *[Tê Exp(Pt(U),X) & X≠ø & C;1, C;2 ê Pt(Pt(U)) & (Ay)(Ax)((xê Rgn(T) & yêU & s(SNu(x)) Inkls(y)).->.yêx) & Bas(C;1,T) & Bas(C;2,T)] .->.C;1=C;2.*

Som man ser sier dette teoremet at hvis T er en teorifamilie der alle teoriene i familien er lukket under logisk konsekvens , (Jmf. den fjerde forutsetningen i teoremet) så er en basis for familien entydig bestemt dersom den eksisterer.

Bevis : Anta for reduktio ad absurdum at hypotesene i teoremet holder , men at det likevel er slik at C;1≠C;2. Da har vi at det finnes z;0 der det enten er slik at (1) z;0 êC;1 & -(z;0 êC;2) eller der det er slik at z;0 êC;2 &-(z:0 ê C;1). Vi betrakter her bare det første tilfellet fordi man kan gjennomføre beviset i det andre tilfellet på en måte som er fullstendig analog. Siden Bas(C;1,T) har vi i følge definisjonen av "Bas(C,T)" at (2) C;1 Inkl Rgn(T). Dette og (1) gir oss
z;0 êRgn(T) og igjen ved hjelp av definisjonen av "Bas(C,T)" (Se klausul (iii) i definisjonen som vi ga ovenfor) og den forutsetning at Bas(C;2,T) følger da eksistensen av x;0 der (3) x;0 êC;2 & s(SNu(x;0)) Inkl s(SNu(z;0)). Men siden Bas(C,2,T) har vi C;2 Inkl Rgn(T) og derfor x;0 êRgn(T). Siden Bas(C;1,T) følger da i lys av klausul (iii) i definisjonen av "Bas(C,T)" at det finnes y;0 der
(4) y;0 ê C;1 & s(SNu(y;0)) Inkl s(SNu(x;0)). Fra (3) og (4) har vi
(5) y;0,z;0 ê C;1 & s(SNu(y;0)) Inkl s(SNu(z;0)). Dette følger siden vi etter (1) har z;0 ê C;1.

Men Bas(C;1,T), og ved hjelp av (5) og klausul (iv) i den definisjonen vi ga kan vi da slutte: s(SNu(y;0)) = s(SNu(z;0)). Men dette,(4) og (3) impliserer (6) s(SNu(x;0)) = s(SNu(z;0)) der x;0 ê C;2 og z;0 ê C;1. I lys av den femte forutsetningen i teoremet har vi :

(+) (Aq)(qê Rgn(T).->. k(q)=q)

Anta (7) yêx;0 for vilkårlig y. Da har vi yêk(x;0) siden (+) holder og vi har x;0 êRgn(T). Da har vi ifølge definisjonen av "k(q)" at

s(SNu(x;0)) Inkl s(y). Dette og (6) impliserer:

s(SNu(z;0)) Inkl s(y) og herav har vi ved hjelp av definisjonen av "k(q)" at y êk(z;0). Siden vi også har at z;0 ê C;1 Inkl Rgn(T) og at (+) holder kan vi enn mer slutte at y êk(z;0)=z;0. Vi har dermed bevist at x;0 Inkl z;0. Inklusjonen den andre veien bevises likedan. Vi konkluderer derfor med at x;0 =z;0. Men i lys av (6) følger da at z;0 ê C;2 & z;0 ê C;1 som strider mot (1). I det andre tilfellet som ble nevnt ovenfor gjennomføres beviset på akkurat den samme måten. Man bare bytter om uttrykkene "C;1" og "C;2" i beviset ovenfor. Dette viser altså at antagelsen C;1≠C;2 leder til en motsigelse og at vi derfor må ha C;1=C;2. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED**.

Vi kan nå formulere de grunnsetningene som står igjen før vi oppsummerer med å gi en fullstendig definisjon av den teorien vi akter å studere. Felles for de resterende aksiomer er at konstruksjonen "Bas(C,T)" som vi definerte ovenfor inngår på en vesentlig måte i dem.

AT 5 Bas(C,Q(w;1,x,t)).->.(Ay)(yêC.->.(Ew;2)(w;2 ê I &.
w;2ês(Br*(SNu(y),x)) & Q(w;1,x,t)=Q(w;2,x,t)))

Som det fremgår av den definisjonen vi ga ovenfor er Q(w;1,x,t) mengden av alle de k(a) der a er et utsagn som beskriver noe det står i personen x`s makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w;1. Mao. kunne man si at Q(w;1,x,t) representerer klassen av alle de handlingsmulighetene som står åpne for x relativt til t i verdenen w;1. Tenker man seg da at Bas(C,Q(w;1,x,t)) er det nærliggende å se på de enkelte elementer i C som de handlingsalternativer som står åpne for x relativt til t i w;1. Eller for å uttrykke det mer nøyaktig , er yêC er y en samling av utsagn som beskriver fullstendig et og bare et av de handlingsalternativer som står åpne for x relativt til t og w;1. I så tilfelle vil, - hvis yêC - , w;2ês(Br*(SNu(y),x)) innebære at utsagnet SNu(y) beskriver noe x realiserer i verdenen w, mao. at x realiserer handlingsalternativet y i w;2.

Aksiomet ovenfor uttrykker derfor at hvis C er en basis for Q(w;1,x,t) så vil det for hvert handlingsalternativ yêC alltid finnes en verden w;2 hvor x relativt til t har de samme handlingsmuligheter som i w;1 og hvor x faktisk realiserer alternativet y. Dette skulle ikke være urimelig intuitivt bedømt.

Vår neste grunnsetning er ikke fullt så komplisert som AT 5 og sier, dersom vi legger tolkningene ovenfor til grunn, at dersom a er et utsagn som beskriver noe som det står i x´s makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w så finnes det en ikke-tom klasse av handlingsalternativer som står åpne for x relativt til t i verdenen w. Setningen formuleres slik:

AT 6 (Ea)M;t(a,x,w).->. (EC)(Bas(C,Q(w,x,t)) & C≠ø)

Vår siste grunnsetning sier at dersom C er en klasse av handlingsalternativer som står åpne for x relativt til tidspunktet t i verdenen w så vil det være slik at x i verdenen w faktisk realiserer et av disse. Også dette kan prima facie virke rimelig og vi har ikke sett noen avgjørende argumenter mot denne antagelse. Vi formulerer denne setningen slik:

AT 7 Bas(C,Q(w,x,t).->.(Eh)(hêC & wês(Br*(SNu(h),x))).

Dermed har vi nådd til veis ende når det gjelder presentasjonen av de grunnsetningene som inngår i den teorien vi ønsker å studere.

Vi kan nå definere vår teori,- som vi vil kalle HT -, presist slik: Teorien HT er den første-ordens teorien hvor språket er L;e(D;h) og hvor de ikke-logiske aksiomene i teorien er alle ZFCu-aksiomene i L;e(D;h), alle E;3-aksiomene i L;e(D;h) og hvor vi i tillegg tar med

AT 0.1 - AT 0.2 samt alle setningene AT 1 - AT 7 som nye ikke-logiske aksiomer.

Konstruksjonen "h er et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t i verdenen w " er intet primitivt predikat i teorien HT. Det innføres ved den følgende definisjon, i det vi bemerker at vi vil benytte uttrykket "Alt;w(h,x,t)" som forkortelse:

DEFINISJON 2.6: Alt;w(h,x,t) <-> (EC)(Bas(C,Q(w,x,t) & hêC)

Vi innfører videre konstruksjonen "a er et utsagn som gir en fullstendig beskrivelse av handlingsalternativet h",- som vi forkorter med "Bef(a,h)" -, ved den følgende definisjon:

DEFINISJON 2.7: Bef(a,h) <-> (Ew)(Et)(Ex)(weI & xêP &têT &
Alt;w(h,x,t) & a=SNu(h))

Tilslutt innfører vi konstruksjonen "h er et handlingsalternativ som x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w ", som forkortes "Re;w(h,x,t)"-, ved:

DEFINISJON 2.8: Re;w(h,x,t) <-> [Alt;w(h,x,t) & (Ay)(yêh.->.Br(y,x,w))]

Dermed har vi gitt en presentasjon av grunnsetningene i teorien HT og de viktigste definisjonene i den. I §5 skal vi gå videre og utlede en rekke satser i teorien, samt drøfte en rekke mer spesielle problemer som oppstår i forbindelse med den.

§3 Handlingsbegrepet i teorien HT

Vi har så langt konsentrert oss om begrepet handlingsalternativ. Vi har imidlertid intet sagt om handlinger. I denne paragrafen skal vi ta opp handlingsbegrepet. I den neste paragrafen skal vi gi mer konkrete eksempler på handlinger og handlingsalternativer.

Vi definerer en *mulig handling* som et par <a,x> som oppfyller kravet (Ew)(wêI & Br(a,x,w). Innfører vi predikatkonstruksjonen "x er en mulig handling", og forkorter vi denne med "MHand(x)", kan definisjonen vi har i tankene formuleres formelt slik :

DEFINISJON 3.1. MHand(x') <-> (Ea)(Ex)(Ew)[x'=<a,x> & Br(a,x,w)]

Det kan muligens virke kunstig å identifisere handlinger med par på denne måten, men når man snakker om handlinger taler man vanligvis om en så diffus klasse med entiteter at man har et ganske stort spillerom når det gjelder den logiske rekonstruksjon av denne art størrelser. Vi skal derfor holde fast ved definisjonen ovenfor en stund.

I tillegg skal vi innføre ytterligere noen predikatkonstruksjoner. For det første introduserer vi "h er en handling som utføres i verdenen w" og forkorter denne med "Hand*(h,w)".

For det andre introduserer vi konstruksjonen " h er en handling som utføres av x i verdenen w " og forkorter denne med " Hand(h,x,w)". Vi foreslår de følgende definisjoner av disse to konstruksjonene :

DEFINISJON 3.2. Hand*(h,w) <-> (Ex)(Ea)(h=<a,x> & Br(a,x,w))
DEFINISJON 3.3. Hand(h,x,w) <-> (Ea)(h=<a,x> & Br(a,x,w))

Disse definisjonene fikserer det handlingsbegrep vi vil arbeide med i dette skrift.

I det følgende skal vi se på forhold som kan motivere disse definisjonene. I denne forbindelse vil vi benytte oss av den følgende fremgangsmåte: Vi tenker oss språket til teorien HT utvidet med de predikatene som er nevnt, dvs. "x er en mulig handling","h er en handling som utføres i verdenen w" og "h er en handling som utføres av x i verdenen w". Man får da et rikere språk. La oss kalle det L;+ akkurat i denne paragrafen. I dette språket vil vi formulere fem setninger, (1) - (5). Disse setningene blir presentert nedenfor. Det vi vil vise er at gitt riktigheten til disse fem setningene, finnes det en naturlig avbildning som avbilder klassen av alle de handlinger en person x utfører i en verden w en-entydig på klassen av alle de utsagn som beskriver noe x gjør i verdenen w. Dette innebærer at det finnes en en-entydig avbildning av klassen av alle de handlinger en person x utfører i verdenen w på klassen av alle de par <a,x> der a er et utsagn som beskriver noe x gjør i verdenen w. Dette resultat er uttrykt i Teorem 3.4 og Teorem 3.5 nedenfor. Så sant de setningene som vi angir er riktige utgjør de derfor et argument til fordel for de definisjonene vi har spesifisert ovenfor. På veien mot disse hovedresultater beviser vi tre teoremer: Teorem 3.1 - 3.3. La oss først presentere setningene (1) - (5):

Anta a er et utsagn, x en bestemt person og w en mulig verden. Anta dessuten at det faktisk er slik at a beskriver et forhold som x realiserer i verdenen w. Da synes det svært rimelig å hevde at agenten x gjør noe i verdenen w, og om x gjør noe i verdenen w synes det rimelig å si at x utfører en handling i verdenen w. Mao. synes den følgende setning rimelig:

(1) (Br(a,x,w).->.(Eh)(Hand(h,x,w))) & (Hand(h,x,w) –> P(x) & wêI)

Anta på den annen side at h er en handling som personen x utfører i verdenen w. Da fortoner det seg heller ikke helt urimelig å hevde at det skulle finnes et utsagn a som er slik at i enhver verden w' hvor x utfører handlingen h er det slik at a beskriver noe x realiserer i verdenen w' og hvor det dessuten er slik at hvis w' er en mulig verden hvor a beskriver noe x realiserer så er det også slik at x utfører h i denne verden. Mao. den følgende setning kan neppe karakteriseres som spesielt søkt og fortoner seg til en viss grad plausibel:

(2) Hand(h,x,w).->. (Ea)[aêU & (Aw')(w'êI.->.
(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w')))]

Det samme kan også den følgende setning sies å være. Den sier at to utsagn a,a' er identiske dersom enhver mulig verden hvor a beskriver noe x realiserer er en verden hvor også a' beskriver noe x realiserer og omvendt. Mao.:

(3) Br(a,x,w)&Br(a',x,w).->.((Aw)(Br(a,x,w) <-> Br(a',x,w)) -> a=a')

La oss også ta i betraktning den følgende setning som uttrykker at dersom h;0 og h;1 er to distinkte handlinger som x utfører i verdenen w så er det logisk mulig at x utfører den ene handlingen, men ikke den andre, eller at x utfører den andre, men ikke den første.

(4) Hand(h;0,x,w)& Hand(h;1,x,w)& h;0≠h;1.->.
(Ew'êI)[(Hand(h:0,x,w') &¬Hand(h,;1,x,w'))
v.((¬Hand(h;0,x,w'))&Hand(h;1,x,w'))]

Jeg tror man skulle kunne medgi at (1)-(4) ved første øyekast kan virke forholdsvis rimelige.

I forbindelse med setningene ovenfor, og da særlig setning (2), betrakter vi den følgende definisjon:

DEFINISJON 3.4. q;(x,h)=(ia)(aêU & (Aw')(w'êI.->.
(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w'))))

Som man ser fra denne definisjonen er q;(x,h) det utsagnet a som er slik at i enhver verden w' hvor a beskriver noe x gjør er det slik at x utfører handlingen h og omvendt: I enhver verden w' hvor x utfører handlingen h er det slik at utsagnet a beskriver noe x gjør. Man kunne i lys av dette foreslå den følgende lesemåte for uttrykket "q;(x,h)", nemlig " det utsagnet som beskriver det forhold at x utfører handlingen h".

I tillegg til påstandene (1) - (4) ovenfor skal vi også ta i betraktning den følgende påstand, som er en slags pedant til (2):

(5) Br(a,x,w).->.(Eh)[Hand(h,x,w) & (Aw')(w'êI.->. (Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w')))]

Denne setningen sier at dersom a er et utsagn som beskriver et forhold x realiserer i verdenen w så finnes det en handling h som er slik at det er logisk nødvendig at x utfører h hvis og bare hvis det er slik at a beskriver noe x realiserer. I tilknytning til (5) innfører vi også den følgende definisjon som i en viss forstand svarer til Definisjon 3.4 :

DEFINISJON 3.5. p;(x,a,w)=(ih)((Hand(h,x,w) &(Aw')(w'êI.->. (Br(a,x,w'). <->. Hand(h,x,w'))))

I forbindelse med uttrykket "p;(x,a,w)" foreslår vi følgende lesemåte: "den handlingen som utføres av x i verdenen w og som beskrives av utsagnet a". Vi har nå spesifisert de setningene som vi nevnte innledningsvis.

La oss nå starte med å formulere og bevise den første av de tre satser som vi annonserte at vi ville studere før vi presenterte hovedresultatet. Det dreier seg om følgende sats:

TEOREM 3.1: *Anta påstandene (2)-(4) angitt ovenfor holder. Da gjelder:*

(a) Hand(h,x,w) <-> Br(q;(x,h),x,w)

(b) Hand(h;0,x,w)&Hand(h;1,x,w)&h;0≠h;1.->. q(x,h;0)≠q(x,h;1)

Som man ser sier det første punktet i denne setningen at h er en handling som x utfører i verdenen w hvis og bare hvis det utsagnet som beskriver det forhold at x utfører handlingen h er et utsagn som beskriver noe x gjør i verdenen w. Den andre klausul i satsen sier at utsagnene q;(x,h;0) og q;(x,h;1) er distinkte om h;0 og h;1 er to distinkte handlinger som utføres av x i verdenen w. Man ser altså at hvis man ikke varierer x og w, men tenker seg at disse variablene har blitt tilordnet en helt bestemt verdi, vil q være en en-entydig funksjon som til hver handling h hvor vi har at Hand(h,x,w) tilordner et og bare et utsagn nemlig q;(x,h). Setter vi per definisjon H;(x,w)=Mg(h: Hand(h,x,w)) og B;(x,w)=Mg(a:Br(a,x,w)) ser man altså at q;(x,h) kan oppfattes som en en-entydig funksjon som avbilder H;(x,w) inn i B;(x,w).

Bevis : La oss aller først vise at det følgende holder under de nevnte forutsetninger:

(i) Hand(h,x,w).->. (Ey)(y=q;(x,h))

Anta (ii) Hand(h,x,w). Fra dette og (2) ovenfor kan vi utlede

(iii) (Ea)[aêU & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w')))]

Anta mot formodning at det finnes to distinkte entiteter a;1 og a;2 som er slik at

(iv) a;1êU & (Aw')(w'êI.->.(Br(a;1,x,w') <-> Hand(h,x,w'))) og

(v) a;2êU & (Aw')(w'êI.->.(Br(a;2,x,w') <-> Hand(h,x,w'))).

Da følger som man lett ser at:

(vi) (Aw)(wêI.->((Br(a;1,x,w) <-> Br(a;2,x,w)) og derfor, siden Br(a,x,w) impliserer wêI,:

(vii) (Aw)(Br(a;1,x,w) <-> Br(a;2,x,w))

Nå følger fra (ii),(iv) og (v) at Br(a;1,x,w) og Br(a;2,x,w). Men da kan vi ved hjelp av (3) og (vii) slutte a;1 = a;2. Det kan derfor i høyden bare finnes et objekt som oppfyller betingelsen etter eksistenskvantoren i (iii). Det følger at vi har:

(viii) (E!a)[aêU & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w')))]

Og derfor i lys av definisjonen av "q;(x,h)" at (Ey)(y=q;(x,h)).Vi har dermed vist at (i) ovenfor holder.

La oss så, etter disse forberedelsene bevise (a). Anta igjen at
(ix) Hand(h,x,w). Da har vi i lys av (i) at (x) a = q;(x,h) for noe a. Fra dette og definisjonen av "q;(x,h)" følger:
(xi) aêU & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w'))). Herav:
(xii) (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w'))) og derfor spesielt:
(xiii) Br(a,x,w) <-> Hand(h,x,w) Ved hjelp av (x) slutter vi fra dette at følgende holder:

(+) Hand(h,x,w) .<->.Br(q;(x,h),x,w)

Vi har nå vist at (+) holder om Hand(h,x,w). Dette viser at implikasjonen mot høyre i (a) holder. La oss også bevise implikasjonen mot venstre. Anta Br(q;(x,h),x,w). Da finnes noe a slik at (x) holder. Da følger som vi har vist rett ovenfor at (xiii) holder. Men fra (xiii), (x) og det forhold at Br(q;(x,h),x,w) følger Hand(h,x,w). Dette avslutter vårt bevis for punkt (a) i teoremet.

La oss se på punkt (b):

Anta (xiv) Hand(h;0,x,w)&Hand(h;1,x,w)&h;0≠h;1

Ved hjelp av (i) ovenfor følger da:
(xv) a=q;(x,h;0) & b=q;(x,h;1) for noen entiteter a og b. Anta for reduktio ad absurdum at
(xvi) a=b. Fra (xv) og definisjonen av "q;(x,h)" følger:
(xvii) aêU & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h;0,x,w')))
(xviii) bêU & (Aw')(w'êI.->.(Br(b,x,w') <-> Hand(h;1,x,w')))

Fra disse to setningene samt (xvi), det at a=b, kan vi imidlertid utlede:
(xix) (Aw)(wêI.->.Hand(h;0,x,w) <-> Hand(h;1,x,w)) . Men fra (xiv) og påstand (4) ovenfor følger:

(xx) (Ew'êI)[(Hand(h:0,x,w') &¬Hand(h,;1,x,w'))
v.((¬Hand(h;0,x,w'))&Hand(h;1,x,w'))]

som åpenbart strider mot (xix). Det følger at a≠b og derfor ved hjelp av (xv) at q;(x,h;0)≠q;(x,h;1). Dette viser at også punkt (b) i teoremet holder om vi forutsetter riktigheten av påstandene (2)-(4). Dette avslutter vårt bevis. **QED**.

La oss nå gå over til det andre annonserte teoremet før vi presenterer hovedresultatene. I motsetning til Teorem 3.1 som i det vesentlige sier at q(x,h) er en en-entydig funksjon fra H;(x,w) inn i B;(x,w) er det følgende teorem en sats som sier at p(x,a,w) - når x og w holdes fiksert - er en en-entydig funksjon som avbilder B;(x,w) inn i H;(x,w). Vi minner i denne forbindelse om, slik det fremgår av de definisjonene vi ga ovenfor, at "H;(x,w)" betegner klassen av alle de handlinger x utfører i verdenen w og at "B;(x,w)" betegner klassen av alle de utsagn som beskriver noe x gjør i verdenen w. Det kan også bemerkes at den andre klausulen i dette teoremet uttrykker den påstand at a er et utsagn som beskriver noe x gjør i verdenen w hvis og bare hvis den handlingen som utføres av x i verdenen w og som beskrives av utsagnet a faktisk er en handling som utføres av x i w. Dette kan virke rimelig intuitivt bedømt.

TEOREM 3.2: *Anta påstandene (2)-(5) angitt ovenfor holder. Da gjelder:*

(a) Br(a,x,w).->.(Ey)(y=p;(x,a,w))
(b) Br(a,x,w) <-> Hand(p;(x,a,w),x,w)
(c) Br(a;1,x,w)&Br(a;2,x,w) & a;1≠a;2.->.p;(x,a;1,w)≠p;(x,a;2,w)

Bevis: Ad punkt (a). Anta (i) Br(a,x,w). Fra dette og (5) følger:
(ii) (Eh)[Hand(h,x,w) & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w')))]
Det vil åpenbart være tilstrekkelig å bevise :

(+) (E!h)[Hand(h,x,w) & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w')))
i lys av definisjonen av p;(x,a,w). La oss derfor anta at det finnes to entiteter h;1 og h;2 som oppfyller kravet etter eksistenskvantoren i (ii), mao. at:
(iii) Hand(h;1,x,w) & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h;1,x,w')))
(iv) Hand(h;2,x,w) & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h;2,x,w')))
Vi må da vise at h;1=h;2.

Nå ser man imidlertid at fra (iii) og (iv) følger:
(v) (Aw')(w'êI.->.(Hand(h;1,x,w) <-> Hand(h;2,x,w'))) Sammen med den første konjunkten i (iii) og den første konjunkten i (iv), samt (4) følger fra dette at h;1=h;2 , som nettopp er det vi ønsker. Dette viser at punkt (a) i teoremet holder.

Ad punkt (b): Anta (o) Br(a,x,w). Fra dette og det vi viste under punkt (a) følger eksistensen av en entitet c der vi har (i) c= p;(x,a,w). Fra dette og definisjonen av "p;(x,a,w)" følger:
(ii) c=(ih)((Hand(h,x,w) &(Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w'). <->. Hand(h,x,w'))))
Fra dette følger i sin tur at:
(iii) (Hand(c,x,w) &(Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w'). <->. Hand(c,x,w')))
Den første konjunkten i denne formelen og (i) impliserer imidlertid at Hand(p;(x,a,w),x,w). Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (b) holder. Anta på den annen side at (iv) Hand(p; (x,a,w),x,w). Da følger i lys av de regler vi har fastlagt for bestemte beskrivelser at det må finnes en entitet c der vi har:
(v) c= p;(x,a,w) . Fra dette følger imidlertid (iii) ovenfor. Og fra den første og andre konjunkten i (iii) skulle det være enkelt å se at vi må ha: Br(a,x,w). Dermed har vi også bevist kondisjonalen mot venstre i punkt (b).

Ad punkt (c): Anta nå at (i) Br(a;1,x,w)&Br(a;2,x,w) & a;1≠a;2 . Vi ønsker da å bevise at p;(x,a;1,w)≠p;(x,a;2,w). Anta for reduktio ad absurdum at (ii) p;(x,a;1,w)=p; (x,a;2,w). I lys av Definisjon 3.4 følger da at det må finnes c og d slik at (iii) c=p; (x,a;1,w) & d=p;(x, a:2,w) & c=d. Fra dette følger så i lys av definisjonen av p;(x,a,w)" at:
(iv) (Hand(c,x,w) &(Aw')(w'êI.->.(Br(a;1,x,w'). <->. Hand(c,x,w')))
(v) (Hand(d,x,w) &(Aw')(w'êI.->.(Br(a;2,x,w'). <->. Hand(d,x,w'))) Siden c=d har vi herav:
(vi) (Aw')(w'êI.->.(Br(a;1,x,w') <-> Br(a;2,x,w'))). Men fra (iv) og (v) følger også Br(a;1,x,w) og Br(a;2,x,w) som sammen med (iv), (v) samt (3) impliserer at a;1=a;2 som er det vi ønsker. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 3.2. **QED**.

Den tredje satsen vi vil studere før vi presenterer hovedresultatene er denne:

TEOREM 3.3: *Anta setningene (1) -(5) holder. Da gjelder:*
(a) *(Ah)(Hand(h,x,w). -> .p;(x,q;(x,h),w)=h)*
(b) *(Aa)(Br(a,x,t) .->. q;(x,p;(x,a,w))=a)*

Vi så at i lys av Teorem 3.1 kan q(x,h) oppfattes som en funksjon som avbilder H;(x,w) inn i B;(x,w). Videre så vi at Teorem 3.2 innebærer at p;(x,a,w) er en funksjon som avbilder ethvert element aêB;(x,w) på et element i H;(x,w). Et spørsmål man da kan stille er dette: Er det slik at hvis man starter med et element h som er med i H;(x,w) og så anvender q på dette slik at man får q;(x,h), vil man da få det samme element h når man anvender funksjonen p på q;(x,h) ? Punkt (a) i teoremet ovenfor viser at dette er tilfelle. Tilsvarende ser man at om man først anvender p på et element aêB;(x,w) slik at man får p;(x,a,w)êH;(x,w) og så anvender q på dette elementet kommer man tilbake til a. Dette fremgår av punkt (b) i satsen ovenfor.

Bevis: Ad punkt (b): Fra punkt (a) i Teorem 3.2 har vi

(i) Br(a,x,w) .->.(Ey)(y=p;(x,a,w)) Fra dette følger at det må finnes noe c slik at:
(ii) Br(a,x,w) .->.c=p;(x,a,w)) . I lys av Definisjon 3.5 har vi herav:
(iii) Br(a,x,w) .->.c=((ih)((Hand(h,x,w) &(Aw')(w'êI.->.
(Br(a,x,w'). <->. Hand(h,x,w'))))))
Fra dette følger i sin tur:
(iv) Br(a,x,w) .->.(Hand(c,x,w) &(Aw')(w'êI.->.
(Br(a,x,w'). <->. Hand(c,x,w')))
Nå har vi ifølge Teorem 3.1 at:
(v) Hand(c,x,w).->. d=q;(x,c) for en eller annen entitet d. Fra dette og definisjonen av "q;(x,h)", Definisjon 3, har vi:
(vi) Hand(c,x,w).->.d=(ia)(aêU & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(c,x,w'))))
Fra dette følger:
(vii) Hand(c,x,w).->.dêU & (Aw')(w'êI.->.(Br(d,x,w') <-> Hand(c,x,w')))
Fra (iv) og (vii) følger:
(viii) Br(a,x,w).->. (Aw')(w'êI.->.(Br(d,x,w') <-> Br(a,x,w'))). Herav har vi:
(ix) Br(a,x,w).->. [Br(a,x,w)&Br(d,x,w) &
(Aw')(w'êI.->.(Br(d,x,w') <-> Br(a,x,w')))]
Fra (ix) sammen med (3) følger så: (x) a=d. Fra (ii),(iv) og (v) utleder vi:
(xi) Br(a,x,w).->.d=q;(x,p;(x,a,w)). Men fra dette og (x) følger åpenbart:
Br(a,x,w).->. q;(x,p;(x,a,w))=a som nettopp er det vi ønsker. Dette avslutter vårt bevis for punkt (b) i Teorem 3.3.

Ad punkt (a): Fra beviset for Teorem 3.1 fremgår det at vi har :
(i) Hand(h,x,w).->. (Ey)(y=q;(x,h)). Fra dette følger det at det må finnes noe c der:
(ii) Hand(h,x,w).->. c=q;(x,h)). I lys av definisjonen av "q;(x,h)" følger fra dette:
(iii) Hand(h,x,w).->. c=(ia)(aêU & (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w'))))
Dette innebærer at vi må ha:
(iv) Hand(h,x,w).->. cêU & (Aw')(w'êI.->.(Br(c,x,w') <-> Hand(h,x,w'))). Dette impliserer i sin tur at :
(v) Hand(h,x,w).->. Br(c,x,w) Fra Br(c,x,w) kan vi i lys av punkt (a) i Teorem 3.2 slutte at det må finnes noe d slik at d= p:(x,c,w). Vi har derfor:
(vi) Hand(h,x,w).->. (Br(c,x,w) & d= p:(x,c,w)). Ved hjelp av definisjonen av "p;(x,a,w)" følger videre:
(vii) Hand(h,x,w).->.d=(ih)(Hand(h,x,w) &(Aw')(w'êI.->.
(Br(c,x,w'). <->. Hand(h,x,w'))))
Dette innebærer:
(viii) Hand(h,x,w).->.Hand(d,x,w) &(Aw')(w'êI.->.
(Br(c,x,w'). <->. Hand(d,x,w')))
Fra dette og (iv) ovenfor følger:
(ix) Hand(h,x,w).->.Hand(d,x,w) &(Aw')(w'êI.->.
(Hand(d,x,w). <->. Hand(h,x,w')))
Men dette og (4) impliserer: Hand(h,x,w).->. h=d. Fra dette ,(ii) og (vi) følger videre at Hand(h,x,w).->. c=q;(x,p;(x,c,w)) som nettopp er det vi ønsker. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 3.3. **QED**.

Vi har nå gitt bevis for de innledende resultater kommer til selve hoved-resultatet og drøftingen av det. Ovenfor har vi forsåvidt definert mengdene H;(x,w) og B;(x,w). La oss innledningsvis repetere disse definisjonene og gi dem et mer "offisielt" navn:

Vi definerer "H;(x,w)", klassen av alle de handlinger som x utfører i verdenen w, ved:

DEFINISJON 3.6 H;(x,w)=Mg(h: Hand(h,x,w))

Videre definerer vi "B;(x,w)" , klassen av alle de utsagn som beskriver noe x gjør i verdenen w, ved:

DEFINISJON 3.7 B;(x,w)=Mg(a:Br(a,x,w))

Fra de teoremer vi nå har vist skulle det fremgå at det finnes en en-entydig avbildning , la oss kalle den H1;(x,w) av H;(x,w) inn i B;(x,w) og dessuten en en-entydig avbildning B1;(x,w) av B;(x,w) inn i H;(x,w). De to avbildningene vi har i tankene kan defineres ved:

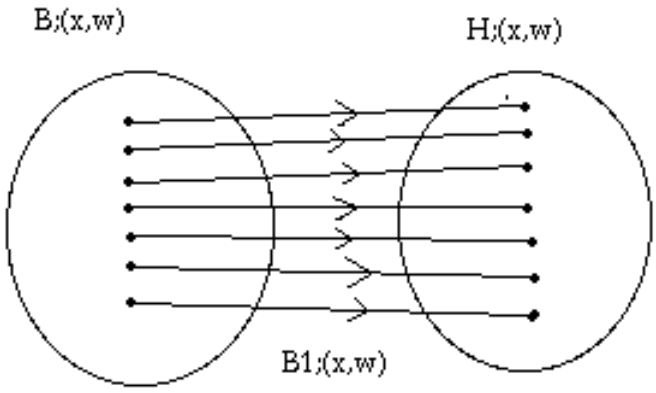
DEFINISJON 3.8 H1;(x,w)[h]=q;(x,h) om hêH;(x,w)
DEFINISJON 3.9 B1;(x,w)[a]=p;(x,a,w) om aêB;(x,w)

Det følgende teorem sammenfatter disse påstander og også det vi tidligere har bevist. Dette teorem sammen med det neste, Teorem 3.5, utgjør det hovedresultat som vi annonserte innledningsvis i denne paragrafen.

TEOREM 3.4: *Anta at (1)-(5) holder. Anta videre at weI og at P(x). Da gjelder:*

(a) *(H1);(x,w) : H;(x,w) -(1-1)-> B;(x,w)*
(b) *(B1);(x,w) : B;(x,w) -(1-1)-> H;(x,w)*
(c) *(Ah)(hêH;(x,w).->. (B1);(x,w)[(H1);(x,w)[h]]=h)*
(d) *(Aa)(aêB;(x,w).->. (H1);(x,w)[(B1);(x,w)[a]]=a)*

Det følgende er en uformell illustrasjon til Teorem 3.4:



La oss gi et bevis for Teorem 3.4.

Bevis: Fra definisjonen av (H1);(x,w) og Teorem 3.1 punkt (a) følger det at (H1);(x,w) avbilder H;(x,w) inn i B;(x,w). Fra det andre punktet i Teorem 3.1 følger det også at avbildningen er en-entydig. Videre har vi i lys av definisjonen som ble gitt ovenfor av funksjonen (B1);(x,w) og Teorem 3.2 at denne avbilder B;(x,w) inn i H;(x,w). Fra punkt (c) i Teorem 3.2 følger det at avbildningen er en-entydig. Dette viser at de to første punktene i Teorem 3.4 holder. De to siste punktene i teoremet følger umiddelbart fra definisjonene av (H1);(x,w) og (B1);(x,w) samt Teorem 3.3. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED**.

Det bør også nevnes at de to avbildningene er *på*. La oss først vise at H1;(x,w)

avbilder H;(x,w) *på* B;(x,w). Det vil være tilstrekkelig å bevise at
(i) (Aa)(aêB;(x,w).->.(Eh)(hêH;(x,w) & H1;(x,w)(h)=a)) Anta derfor at aêB;(x,w) for en eller annen entitet a. Da har vi ifølge definisjonen av B;(x,w) at Br(a,x,w). Dette og Teorem 3.3 impliserer at q;(x,p;(x,a,w))=a. Sett h=p;(x,a,w). Da følger at Hand(h,x,w) ifølge Teorem 3.2. Vi må derfor ha i lys av definisjonene av H;(x,w) og H1;(x,w) at (Eh)(hêH;(x,w) & H1;(x,w)(h)=a)) som er det vi ønsker. På en helt tilsvarende måte bruker man Teorem 3.3 og Teorem 3.1 til å vise at B1;(x,w) avbilder B;(x,w) på H;(x,w).

Disse overveielsene viser at Teorem 3.4 kan forsterkes til:

TEOREM 3.5: *Anta at (1)-(5) holder. Anta videre at weI og at P(x). Da gjelder:*

(a) *(H1);(x,w) : H;(x,w) -(1-1,på)-> B;(x,w)*
(b) *(B1);(x,w) : B;(x,w) -(1-1,på)-> H;(x,w)*
(c) *(Ah)(hêH;(x,w).->. (B1);(x,w)[(H1);(x,w)[h]]=h)*
(d) *(Aa)(aêB;(x,w).->. (H1);(x,w)[(B1);(x,w)[a]]=a)*
(e) *Cnv(H;1(x,w))=B;1(x,w)*

Vi skal nå relatere de resultatene vi har bevist ovenfor til de definisjonene vi ga innledningsvis. Det dreide seg om Definisjon 3.1- Definisjon 3.3. Fra teoremene følger, som man ser, at H;(x,w), dvs. mengden av alle de handlinger individet x utfører i verdenen w, kan avbildes en-entydig på B;(x,w), mengden av alle de utsagn som beskriver forhold som x realiserer i verdenen w. Men dette innebærer at også alle elementene i H;(x,w) kan avbildes en-entydig og på alle par av typen <a,x> der aêB;(x,w). I seg selv gjør ikke dette det spesielt naturlig å identifisere de enkelte elementer i H;(x,w) med denne typen par. Men ser man nærmere på de funksjonene vi har definert, ie. H1 og B1, - og de egenskaper som de har i kraft av sin definisjon og resulatene presentert i Teorem 3.4 og Teorem 3.5 - virker dette naturlig. Dette er da bakgrunnen for at vi fremsatte disse definisjonene. Nå er det bare under forutsetning av at setningene (1) – (5) holder at vi har utledet våre teoremer. Rimeligheten av de innledende definisjoner vil derfor avhenge av om disse setningene kan oppfattes som plausible. Vi kan imidlertid ikke fremlegge noen dypere argumenter til fordel for (1) – (5), slik at vårt forsøk på å begrunne de innledende definisjoner må stoppe på dette punkt. Dog virker ikke (1) – (5) ved første øyekast aldeles urimelige. Man skulle vel derfor kunne medgi at argumentasjonen så langt gjør at de innledende definisjoner av konstruksjonene "x er en mulig handling", "h er en handling som utføres i verdenen w" og " h er en handling x utfører i verdenen w", ikke fremstår som vilkårlige eller helt ubegrunnede.

La oss nå se på et annet forhold som er av interesse i forbindelse med definisjonene vi ga innledningsvis og som ytterligere kan kaste noe lys over dem.

Anta vi definerer "Hand(h,x,w)" som ved Definisjon 3.3, videre definierer "MHand(x)" som ved Definisjon 3.1 og "Hand*(h,w)" som ved Definisjon 3.2. Man kan da spørre om ikke setningene (1) – (5) som vi tidligere har nevnt kan utledes ved hjelp av disse definisjonene. Det man kan vise i denne forbindelse er at man kan utlede (1),(2), (4) og (5) fra disse definisjonene om man forutsetter riktigheten av (3). La oss gi et bevis for denne påstand:

Vis starter med setningen (2):

Anta Hand(h,x,w). Fra Definisjon 3.3 følger da at det finnes a som er slik at h=<a,x> & Br(a,x,w). Fra dette følger at (i) aêU. Anta for vilkårlig w' at w'êI og at Br(a,x,w'). Da har vi h=<a,x>& Br(a,x,w') og derfor i lys av Definisjon 3.3 at Hand(h,x,w'). Anta Hand(h,x,w') for vilkårlig w' der w'êI. Da har vi etter definisjon 3 at det finnes a' slik at h=<a',x>& Br(a',x,w). Men da <a',x>=<a,x> og herav følger a'=a. Da må vi ha: Br(a,x,w). Vi har altså bevist:

(Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w) <-> Hand(h,x,w')). Sammen med (i) gir dette oss konsekventen i (2). Dette viser at (2) kan utledes på grunnlag av denne definisjonen.

La oss også se om setning (5) kan utledes ved hjelp av Definisjon 3.3. Anta Br(a,x,w). Da er det klart at det finnes noe h slik at (i) h=<a,x>&Br(a,x,w). Fra dette og Definisjon 3.3 følger i så fall (ii) Hand(h,x,w). Anta for vilkårlig w' at w'eI. Vi må da vise:

(+) Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w'))

Anta Br(a,x,w'). Da har vi h=<a,x> & Br(a,x,w'). Fra dette og Definisjon 3.3 følger at Hand(h,x,w'). Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (+) holder. Har vi på den annen side at Hand(h,x,w') følger, igjen ved hjelp av Definisjon 3.3, at

(iii) h=<a',x>&Br(a',x,w') for noe a'. Men i lys av (i) har vi da <a',x>=<a,x> og derfor a=a'. Men dette og (iii) impliserer åpenbart at Br(a,x,w'). Dette viser at (+) holder for vilkårlige w' der w'êI. Sammen med (ii) gir dette oss:

(iv) Hand(h,x,w)&(Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w'))) som nettopp er konsekventen i (5). Dette viser at også (5) kan utledes ved hjelp av Definisjon 3.3.

Når det gjelder setningen (1) er det også nokså åpenbart at denne kan utledes ved hjelp av Definisjon 3.3 siden den strengt tatt er overflødig fordi den følger direkte fra den langt sterkere påstanden (5).

Det gjenstår da bare å se på (3) og (4). Siden (3) ikke inneholder konstruksjonen "Hand(h,x,w)" kan denne naturligvis ikke utledes på grunnlag av Definisjon 3.3. Derimot kan det være at (4) kan utledes. La oss se på dette:

Vi har at (4) er ekvivalent med:

(4.1) [Hand(h;0,x,w)&Hand(h;1,x,w) & (Aw')(w'êI.->.
(Hand(h;0,x,w') <-> Hand(h;1,x,w'))].->. h;1=h;0.

Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at vi kan utlede (4.1) på grunnlag av Definisjon 3.3 og setning (3). Anta derfor at antesedenten i (4.1) holder. Da følger fra den første konjunkten i denne at det finnes a slik at

(i) h;0=<a,x> & Br(a,x,w) Fra den andre konjunkten i antesedenten i (4.1) følger:

(ii) h;1=<a',x> & Br(a',x,w) for noe a'. Vi ønsker nå å bevise:

(#) (Aw')(w'êI.->.Br(a',x,w') <-> Br(a,x,w')) fordi dette sammen med (i),(ii), og setning (3) impliserer at a'=a og derfor h;0=h;1 i lys av de to første konjunktene i hhv. (i) og (ii). Det vil altså være tilstrekkelig å bevise (#).

Anta derfor i første omgang at w'eI & Br(a',x,w') for vilkårlig w'. Da har vi siden h;1=<a',x> ved hjelp av Definisjon 3.3 at Hand(h;1,x,w'). Ved hjelp av den tredje konjunkten i antesedenten i (4.1) følger herav Hand(h;0,x,w') og da ved hjelp av definisjon 3 at det finnes a" slik at h;0=<a",x> & Br(a",x,w). Men fra dette og (i) følger a"=a og derfor Br(a,x,w). Vi har dermed bevist den ene halv delen av (#). Den andre halvdelen vises likedan. Dette avslutter dermed vårt bevis for (4.1).

Våre utledninger viser altså at det følgende teorem holder:

TEOREM 3.6 *Anta setning (3) holder og at "Hand(h,x,w)" defineres ved :*

(+) Hand(h,x,w) <-> (Ea)(h=<a,x> & Br(a,x,w). Da holder setningene (1),(2),(4) og (5). ie vi har:

(1) Br(a,x,w).->.(Eh)(Hand(h,x,w))

(2) Hand(h,x,w).->. (Ea)[aêU & (Aw')(w'êI.->.
(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w')))]

(4) Hand(h;0,x,w)& Hand(h;1,x,w)& h;0≠h;1.->.
(Ew'êI)[(Hand(h:0,x,w') &¬Hand(h,;1,x,w'))
v.((¬Hand(h;0,x,w'))&Hand(h;1,x,w'))]

(5) Br(a,x,w).->.(Eh)[Hand(h,x,w) & (Aw')(w'eI.->.
(Br(a,x,w') <-> Hand(h,x,w')))]

I lys av disse overveielsene skulle det fremgå at Definisjon 3.3 i det vesentlige er ekvivalent med setningene (2),(4) og (5) under forutsetning av at man aksepterer setningen (3). Vi behøver ikke ta med setning (1) her siden den strengt tatt er overflødig og følger fra setning (5). Vår konklusjon er derfor at man utmerket godt kan akseptere Definisjon 3, og dermed også definisjon 1 og 2 *hvis man er villig til å akseptere setningene (1) – (5)* . Det er dette vi har bevist. Vi har selvfølgelig ikke fremlagt , som det fremgår av det som står ovenfor, noe bevis for (1)-(5), men det synes ikke helt urimelig eller selvmotsigende å godta disse. I denne forbindelse kan man spekulere på om setningen (3) uten selvmotsigelse kan legges til de øvrige aksiomer vi har nevnt i §2. Vi har en mistanke om at dette skulle la seg gjøre, men må medgi at vi ennå ikke har utarbeidet et detaljert bevis for denne påstand. Kan dette la seg gjøre synes det i hvert fall ikke å være noen rent formal-logiske innvendinger som kan rettes mot setningene (1) – (5).

Vi har en sterk følelse av at setning (3) ikke er korrekt. Det synes å dreie seg om en for sterk påstand. Spørsmålet er om ikke denne setningen vil ha endel eiendommelige konsekvenser når den legges til våre øvrige handlingsteoretiske grunnsetninger for konstruksjonen "Br(a,x,w)", eller tenkes lagt til som et nytt ikke-logisk akisom i teorien HT. Dette har vi ennå ikke undersøkt, men spørsmålet kan sikkert undersøkes nøyere. Her skal vi la dette ligge.

Det som imidlertid er interessant er den sammenheng som vi har bevist mellom setningene (1) – (5) på den ene side og Definisjon 3.1 – Definisjon 3.3 på den annen side. Setningene (3) og (4) synes å spille en vesentlig rolle i bevisene for setningene som synes å utgjøre kjernen i denne sammenheng - vi sikter til Teorem 3.1 - 3.5. Kutter vi vekk (3) og (5) og bare beholder (2) og (5) virker det som om vi ikke lenger kan utlede Teorem 3.1- Teorem 3.5.

Det spørsmål kan derfor stilles om man ikke kan velge en annen fremgangsmåte for å motivere Definisjon 3.1 - Definisjon 3.3. Kan man komme noen vei med bare (2) og (5)? Dette synes faktisk å være tilfelle og i det følgende skal vi presentere endel resultater som vi finner relevante i denne forbindelse.

La oss istedet for (3) og (4) innføre de følgende relasjoner:

DEFINISJON 3.10. H-ekv/x/(h;0,h;1) <-> (Aw')(w'êI.->.
(Hand(h;0,x,w') <-> Hand(h;1,x,w')))

Det er lett å vise at denne relasjonen er en ekvivalensrelasjon, dvs. at den er transitiv, symmetrisk og refleksiv.

En tilsvarende relasjon i forbindelse med "Br(a,x,w)" innføres slik:

DEFINISJON 3.11. B-ekv/x/(a;0,a;1) <-> (Aw')(w'êI.->.
(Br(a;0,x,w') <-> Br(a;1,x,w')))

På akkurat samme måte som man innser at H-ekv/x/ er en ekvivalensrelasjon ser man at B-ekv/x/ er en slik relasjon.

Vi definerte tidligere H;(x,w) og B;(x,w) ved:

(0.3) H;(x,w)=Mg(h: Hand(h,x,w))
(0.4) B;(x,w)=Mg(a: Br(a,x,w))

De to ekvivalensrelasjonene H-ekv/x/ og B-ekv/x/ vil derfor inndele disse to mengdene i

innbyrdes disjunkte ekvivalensklasser som samlet uttømmer hhv. H;(x,w) og B;(x,w). La oss betegne klassen av ekvivalensklasser over H;(x,w) med hensyn på relasjonen H-ekv/x/ med H#(x,w) og klassen av ekvivalensklasser over B;(x,w) med hensyn på B-ekv/x/ med B#(x,w). Når det gjelder ekvivalens-relasjonene H-ekv/x/ og B-ekv/x/ skulle det være nokså klart at de følgende setninger gjelder, siden det her dreier seg om direkte og enkle anvendelser av velkjente setninger som gjelder om ekvivalensrelasjoner generelt. Imidlertid bemerker vi først at hvis aêB;(x,w) betegner vi ekvivalensklassen til a med hensyn på B-ekv/x/ over B;(x,w) med [a];Br. Er på den annen side hêH;(x,w) betegner vi ekvivalensklassen til h med hensyn på H-ekv/x/ over H;(x,w) med [h];H.

(1.1) Un(B#(x,w))=B;(x,w)
(1.2) (Au)(Av)(u,vêB;(x,w).->.Sn([u];Br ,[v];Br)=ø)
(1.3) (Au)(uêB;(x,w).->. [u];Br ≠ø)
(1.4) (Au)(uêB;(x,w).->.uê([u];Br))
(1.5) (Au)(Av)(u,vêB;(x,w)&B-ekv/x/(u,v).->.uê([v];Br))

Tilsvarende setninger gjelder for H-ekv/x/ :

(2.1) Un(H#(x,w))=H;(x,w)
(2.2) (Au)(Av)(u,vêH;(x,w).->.Sn([u];H ,[v];H)=ø)
(2.3) (Au)(uêH;(x,w).->. [u];H ≠ø)
(2.4) (Au)(uêH;(x,w).->.uê([u];H))
(2.5) (Au)(Av)(u,vêH;(x,w)&H-ekv/x/(u,v).->.uê([v];H))

Spørsmålet er nå om vi kan definere en naturlig avbildning, la oss kalle den F, av H#(x,w) inn i B#(x,w) som vi kan vise at er en-entydig og på B#(x,w) gitt at setningene (2) og (5) holder. Vi skal vise at man kan gjøre dette.
Den funksjonen F som vi har i tankene kan eksplisitt defineres slik:

(3.1) F=Mg(<[h];H,(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))))>: hêH;(x,w))

Parametrene x,w er da sløyfet fra F. Men vil man ha dem med bør man skrive "F;(x,w)" istedet for "F". Definisjonen overfor kan da reformuleres slik:

(3.2) F;(x,w)=Mg(<[h];H,(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))))>: hêH;(x,w))

Gitt denne definisjonen av F kan man nå vise den følgende sats, som representerer vårt tredje hovedresultat i denne paragrafen:

TEOREM 3.7: *Anta setningene (2) og (5) holder. Anta videre at F;(x,w) er definert som ved (3.2) Da gjelder følgende:*

(+) F;(x,w): H#(x,w) -(1-1,på) -> B#(x,w)

Bevis: (A) Vi skal først vise at F;(x,w) er en funksjon. Dvs. at vi tar sikte på å bevise (1) (Ac)(Ad)(Ak)(<a,d>,<a,k> êF;(x,w).->.d=k). Anta derfor for vilkårlige a,d,k at : (2) <a,d>êF;(x,w) & <a,k>êF;(x,w). Da har vi i lys av definisjon (7.2) at det må finnes h;1 og h;2 slik at :

(3) <a,d>=<[h;1];H,(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h;1,x,w') <-> Br(a,x,w')))))>
(4) <a,k>=<[h;2];H,(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
Aw')(w'êI.->.(Hand(h;2,x,w') <-> Br(a,x,w')))))>

Fra (3) og (4) følger da [h;1];H=[h;2];H. Dette innebærer at H-ekv/x/(h;1,h;2). Fra dette og definisjonen av H-ekv/x/ følger:

(5) (Aw')(w'êI.->.(Hand(h;1,x,w') <-> Hand(h;2,x,w')))

Fra (3) og (4) følger også at:

(6) d=(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h;1,x,w') <-> Br(a,x,w'))))) og

(7) k=(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h;2,x,w') <-> Br(a,x,w')))))

Fra (5),(6) og (7) skulle man imidlertid lett se at: (8) d=k som nettopp er det vi ønsker. Vi skulle dermed ha levert et bevis for formel (1).

Vi burde også vise at (8) (Ah)(hêH;(x,w).->.(Ey)(<[h];H,y>êF;(x,w))). For vi må jo også for å godtgjøre (+) vise at Dom(F;(x,w))=H#(x,w). Dette innebærer at vi må vise at

(8.0) H#(x,w) Inkl Dom(F;(x,w)) og at

(8.1) Dom(F;(x,w)) Inkl H#(x,w). Man ser at (8) impliserer (8.0).

Anta derfor for vilkårlig h at (9) heH;(x,w). Da har vi i lys av definisjonen av "H;(x,w)" at Hand(h,x,w) og derfor ved hjelp av (2) at det finnes a slik at

(9) aêU & (Aw')(w'êU.->.(Hand(h,x,w) <-> Br(a,x,w))).

Siden vi har [a];Br=[a];Br har vi da:

(10) (Eq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w'))))).

Men vi må også vise at det bare finnes en slik q. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes q;1 og q;2 der (11) q,1≠q;2 og der vi har

(11) (Ea)(q;1=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w'))))

(12) (Ea)(q;2=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w'))))

Da følger eksistensen av a' og a" der:

(13) q;1=[a'];Br & a'êU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a',x,w')))

(14) q;2=[a"];Br & a"êU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a",x,w')))

Fra disse to formlene ser man imidlertid at vi kan slutte:

(15) (Aw')(w'êI.->.(Br(a',x,w') <-> Br(a",x,w')))

Dette innebærer i lys av definisjonen av B-ekv/x/ at (16) B-ekv/x/(a',a") og derfor at

(17) [a'];Br=[a"];Br. Fra dette (13) og (14) følger q;1=q;2. Våre utledninger viser at man har:

(18) (E!q)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))))

Men fra dette og elementære setninger om bestemte beskrivelser følger eksistensen av y slik at:

(19) y=(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w'))))).

Fra (19) og definisjonen av F;(x,w) følger <[h];H,y>êF;(x,w) og derfor at

(Ey)(<[h];H,y>êF;(x,w)). Dermed har vi gitt et bevis for (8) og dessuten for (8.0) som følger direkte fra (8). At (8.1) holder skulle være lett å innse, men la oss likevel gi et bevis: Anta yêDom(F;(x,w)). Da finnes c slik at <y,c>êF;(x,w).Fra definisjonen av F følger da eksistensen av h slik at :

(20) hêH;(x,w) og

(21) <y,c>=<[h];H,(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w'))))))>

Da har vi selvfølgelig at y=[h];H og derfor i lys av (20) at yêH#(x,w).

(B) Vi har så langt vist at domenet til F;(x,w) er H#(x,w) og at Func(F;(x,w)). Vi må også vise at F;(x,w) er en-entydig. Dette skal vi gjøre nå. Det vil være tilstrekkelig å bevise:
(Ac)(Ak)(Ad)(<k,c>,<d,c>êF;(x,w).->.k=d). Anta derfor for vilkårlige c,k,d at
(1) <k,c>êF;(x,w) & <d,c>êF;(x,w). Fra definisjonen av F følger da at det må finnes h' og h" slik at:

(2) h',h" êH;(x,w) der vi har:
(3) <k,c>=<[h'];H,(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h',x,w') <-> Br(a,x,w')))))>
(4) <d,c>=<[h"];H,(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h",x,w') <-> Br(a,x,w')))))>

Fra (3) og (4) fremgår det at:

(5) c=(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h',x,w') <-> Br(a,x,w')))))=
(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h",x,w') <-> Br(a,x,w')))))

Fra dette følger imidlertid: (6) H-ekv/x/(h',h") og herav har vi i sin tur at
(7) [h'];H=[h"];H. Fra (3) og (4) følger imidlertid også at
(8) k=[h'];H & d=[h"];H. Men fra (7) og (8) har vi selvfølgelig k=d som er det vi ønsker. Dette skulle være fullt tilstrekkelig som bevis for at F;(x,w) er en-entydig.

(C) Vi skal også vise at Rgn(F;(x,w)) Inkl B#(x,w). Anta derfor for vilkårlig y at (1) yêRgn(F;(x,w)). Da følger at det finnes c slik at

(2) <c,y>êF;(x,w). Fra dette og definisjonen av F;(x,w) følger eksistensen av h der vi har: (3) hêH;(x,w) og
(4) <c,y>=<[h];H,(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))))> .

Det følger fra dette at (5) c=[h];H og

(6) y=(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))))

Fra (6) har vi:

(7) (Ea)(y=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w'))))

Det må derfor finnes a slik at:

(8) y=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))

Vi har derfor (9) y=[a];Br for noe a. Fra (3) følger Hand(h,x,w) og fra dette og (8) har vi Br(a,x,w). Dette, (9) og definisjonen av "H#(x,w)" impliserer det vi ønsker nemlig at yêH#(x,w). Dette viser at Rgn(F;(x,w)) Inkl B#(x,w).

(D) Det gjenstår å vise at F;(x,w) er på B#(x,w). Anta derfor for vilkårlig y at

(1) yêB#(x,w). Da må det finnes a slik at :
(2) y=[a];Br & Br(a,x,w).

Fra det siste og setning (5) i §3 følger eksistensen av h der følgende er tilfelle:

(3) Hand(h,x,w) & (Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))

Vi ønsker nå å bevise at F;(x,w)[[h];H]=y=[a];Br. Dette vil være tilstrekkelig. I lys av definisjonen av F;(x,w) har vi:

F;(x,w)[[h];H]=(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))))

Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise:

[a];Br=(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &

(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))))

Fra (3) ovenfor, og det vi viste under (A), følger at det finnes z der:

(4) z=(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))))

Vi har derfor at det må finnes noe a' slik at:

(5) z=[a'];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a',x,w')))

Men fra (5) og (3) følger (Aw')(w'êI.->.(Br(a,x,w') <-> Br(a',x,w'))) og derfor at: (6) B-ekv/x/(a,a'). Dette impliserer [a'];Br=[a];Br. Men fra dette og den første konjunkten i (5) har vi z=[a];Br som i lys av (4) gir:

[a];Br=(iq)((Ea)(q=[a];Br & aêU &
(Aw')(w'êI.->.(Hand(h,x,w') <-> Br(a,x,w')))))

som nettopp er det vi ønsker. Dermed har vi også bevist at F;(x,w) er på B#(x,w). Dette avslutter vårt bevis for Teorem 3.7. **QED**.

Studerer man nærmere det beviset vi har gitt har vi bare benyttet setningene (2) og (5) i §3. Vi har derfor ikke benyttet de tvilsomme setningene (3) og (4) i den paragrafen.

Det gjenstår å gjøre rede for hvordan de resultatene vi har bevist her er relatert til de definisjonene som vi startet med i denne paragrafen.

Vi har at H-ekv/x/(h,h') hvis og bare hvis h og h' er handlinger som er slik at det er logisk nødvendig at x utfører h hvis og bare hvis x utfører h'. Dette kunne også uttrykkes, men litt mindre nøyaktig, ved å si at det dreier seg om to handlinger der utførelsen av den ene er logisk ekvivalent med utførelsen av den andre. Tilsvarende har vi at B-ekv/x/(a,a') hvis og bare hvis a,a' er to utsagn der det er logisk nødvendig at a beskriver noe x realiserer hvis og bare hvis a' beskriver noe x realiserer. Det vi har vist er at H-ekv/x/-ekvivalensklassene over H;(x,w) kan avbildes en-entydig på B-ekv/x/-ekvivalensklassene over B;(x,w) og på hva man kunne karakterisere som en naturlig måte. Dette innebærer at hvis h er en handling som x utfører i w så avbilder F;(x,w) H-ekv/x/-klassen som h er med i på en B-ekv/x/-klasse som inneholder et utsagn a hvor vi har at det er logisk nødvendig at a beskriver noe x realiserer hvis og bare hvis x utfører handlingen h. Dette gjør det da svært naturlig å identifisere en handling h som individet x utfører i verdenen w med det ordnete par <a,x> hvor a er det korresponderende utsagn som beskriver noe x realiserer i verdenen w. At Teorem 3.7 kan bevises synes derfor å være et vesentlig motiv for å akseptere Definisjon 3.3 og dermed de andre definisjonene vi ga innledningsvis.

La oss i denne forbindelse bemerke at det fremgår fra beviset vi ga for Teorem 3.6 at hvis man aksepterer Def inisjon 3.3 kan man utlede setningene (2) og (5). Sammen med Teorem 3.7 kan man derfor si at disse to setningene i en viss forstand er ekvivalente med denne definisjon. Siden vi ikke ser noen åpenbar grunn til å forkaste setningene (2) og (5) skulle det derfor ikke være noen spesielle grunner til å forkaste de definisjoner vi innledningsvis presenterte for leseren.

La oss avslutte med to bemerkninger i forbindelse med Teorem 3.7 :

For det første bør man legge merke til at Teorem 3.7 er sterkere enn de teoremene vi har vist tidligere i denne paragrafen, nemlig Teorem 3.1 - Teo-rem 3.5. Disse satsene kan utledes ved hjelp av de definisjoner vi så langt har gitt og Teorem 3.7. Vi har nemlig at (3) impliserer at hvis Br(a,x,w) så har vi at [a];Br ={a}, mao at [a];Br er den enhetsmengden som bare inneholder a. Hvis derfor (3) og (4) forutsettes vil de diverse elementer i H#(x,w) og B#(x,w) være enhetsmengder og vi har om f.eks. ceH#(x,w) at c={h} for noe h . Vi har da at F;(x,w)[c]=q(x,h). Tilsvarende vil vi ha om dêB#(x,w) at d={a} for noe a der Br(a,x,w). Da har vi at (F;(x,w));-1[d]=p(a,x,w). Dette viser at funksjonene som vi tidligere definerte ved:

DEFINISJON 3.8 H1;(x,w)[h]=q;(x,h) om hêH;(x,w)

DEFINISJON 3.9 B1;(x,w)[a]=p;(x,a,w) om aêB;(x,w)

også kan defineres ved hjelp av funksjonen F;(x,w) og at vi kan vise at disse har de egenskapene som trengs om vi forutsetter at (3) og (4) holder.

For det andre bemerker vi at den følgende sats er et korollar til Teorem 3.7.

TEOREM 3.8 *Anta (2) og (5) holder. Da har vi at det finnes en funksjon f som oppfyller følgende krav:*

(1) f : H#(x,w) – (1-1, på)–> B#(x,w)
(2) (Ah)(Aa)(Hand(h,x,w) & aêf([h];H) ->
(Aw')(w'êI -> (Hand(h,x,w) <-> Br(a,x,w'))))

Det er viktig å nevne denne satsen fordi det skulle være klart at det i og for seg ikke er så interessant at det finnes en eller annen en-entydig avbildning av H#(x,w) på B#(x,w). Ikke alle slike avbildninger er interessante og det finnes en uendelighet av slike avbildninger. Det som imidlertid skiller funksjonen F, som vi konstruerte ovenfor, fra en vilkårlig avbildning mellom de to mengdene er at den i tillegg til å oppfylle kravet (1) i Teorem 3.8 også oppfyller kravet (2) i dette teorem.

Bevis: Anta at (1) Hand(h,x,w) og at (2) aêF([h];H). Det vil være tilstrekkelig å bevise: (+) (Aw')(w1êI->(Hand(h,x,w')<-> Br(a,x.w'))). At F eksisterer og at vi har F: H#(x,w) -(1-1,på)-> B#(x,w) skulle være opplagt. Fra (2) og definisjonen av F følger: (3) aê(iq)((Ea')(q=[a'];Br & a'êU &

(Aw')(w'êI -> (Hand(h,x,w') <-> Br(a',x,w)))))

Dette innebærer at det finnes a;2 slik at

(4) aê[a;2];Br & a:2êU &

(Aw')(w'êI -> (Hand(h,x,w') <-> Br(a;2,x,w)))

Nå har vi at [a;2];Br= Mg(b: (Aw')(w'êI -> (Br(b,x,w) <-> Br(a;2,x,w')))). Fra dette og (4) følger: (Aw')(w'êI -> (Br(a,x,w) <-> Br(a;2,x,w')). Dette og den siste konjunkten i (4) impliserer (+), som nettopp er det vi ønsker. **QED**

Vi har nå sett at den funksjonen F som vi har konstruert oppfyller de to kravene som ble nevnt i Teorem 3.8. Men man kan også vise at hvis to funksjoner, g;1 og g;2, oppfyller disse kravene så er de identiske. Dette er ytterligere et argument som viser at F ikke anses som en hvilken som helst vilkårlig en-entydig avbildning mellom H#(x,w) og B#(x,w). Den følgende sats viser at enhver funksjon som oppfyller kravene i Teorem 3.8 er entydig bestemt:

TEOREM 3.9 *Anta (2) og (5) holder. Anta g;1 og g;2 er funksjoner som oppfyller de følgende krav:*

(i) g;1 : H#(x,w) – (1-1, på)–> B#(x,w)
(ii) (Ah)(Aa)(Hand(h,x,w) & aêg;1([h];H) ->
(Aw')(w'êI -> (Hand(h,x,w) <-> Br(a,x,w'))))
(iii) g;2 : H#(x,w) – (1-1, på)–> B#(x,w)
(iv) (Ah)(Aa)(Hand(h,x,w) & aêg;2([h];H) ->
(Aw')(w'êI -> (Hand(h,x,w) <-> Br(a,x,w'))))

Da har man at g;1=g;2.

Bevis: For å vise at satsen holder er det nok å vise:

(+) (Aq)(qêH#(x,w) –> g;1(q)=g;2(q))

Anta derfor at qêH#(x,w) for vilkårlig q. Da følger i lys av definisjonen av H# at det finnes h

slik at (1) q=[h];H & Hand(h,x,w). Fra dette og klausulene (ii) og (iv) i teoremet følger:

(2) (Aa)(aêg;1([h];H) ->
(Aw')(w'êI -> (Hand(h,x,w) <-> Br(a,x,w')))

(3) (Aa)(aêg;2([h];H) ->
(Aw')(w'êI -> (Hand(h,x,w) <-> Br(a,x,w')))

Anta nå for reduktio ad absurdum at g;1(q)≠g;2(q). I lys av (1) innebærer dette:

(4) g;1([h];H) ≠ g;2([h];H) Fra (i) og (iii) i teoremet følger det at g;1([h];H)êB#(x,w) og at g;2([h];H)êB#(x,w). Fra dette og definisjonen av B#(x,w) følger det at det finnes a;1 og a;2 slik at: (5) g;1([h];H)=[a;1];Br & g;2([h];H)=[a;2];Br . Vi må åpenbart ha at [a;1];Br≠[a;2];Br. Siden disse to mengdene er ekvivalensklasser følger det videre at de er disjunkte. Dette innebærer at

(6) ¬(Aw')(w'êI –> (Br(a;1,x,w') <-> Br(a;2,x,w'))).

I lys av (5) har vi a;1êg;1([h];H) og a;2êg;2([h];H). Dette, (2), (3) og (6) gir oss en motsigelse. Det følger at g;1(q) = g;2(q). **QED**

§4 Eksempler på handlinger og handlingsalternativer.

Så langt har vi ikke gitt noe konkret eksempel på en handling. Denne mangel ved vår fremstilling skal vi nå forsøke å fjerne.

Det kan være gunstig å starte med et enkelt og trivielt eksemplel. La oss studere handlingen å åpne et vindu. Hvis en bestemt person x utfører denne handlingen vil vedkommende begynne med å utføre den ved et bestemt tidspunkt. La dette tidspunktet være t;1. Etter tidspunktet t;1 vil så x være iferd med å åpne vinduet inntil vi kommer til tidspunkt t;2 hvor vedkommende avslutter utførelsen av handlingen. For mange handlinger synes det derfor naturlig å si at man begynner utførelsen av dem ved et bestemt tidspunkt og avslutter utførelsen ved et tidspunkt som kommer etter. Videre at man ved ethvert tidspunkt som ligger mellom disse to tidspunkter hele tiden er i ferd med å utføre handlingen. Dette gjelder slike handlinger som den vi nevnte, men også f.eks. det å lukke en dør, det å gå fra et rom til et annet i et bestemt hus, det å kjøpe en bilett i et bilett-utsalg, det å slukke lyset i et rom, det å ytre en setning eller et ord, det å hilse på en person. Leseren kan selv fortsette rekken av eksempler. Man legger også merke til at noen handlinger er sammensatt av delhandlinger som følger etter hverandre. Ser man f.eks. på den handlingen som består i å kjøpe en billett i et billett-utsalg vil denne kanskje først bestå i at man beveger seg frem til bilettluken, dernest ytrer en setning, dernest tar frem en viss pengesum, dernest tar imot vekslepenger og billett, dernest sier "Takk" for så endelig å bevege seg vekk fra luken.

La oss imidlertid vende tilbake til eksemplet med å åpne et vindu og se på hvordan dette kan behandles innenfor den rammen vi har satt opp. Selvom det kan forekomme en svært pedantisk skal vi tillate oss å formalisere våre betraktninger. Grunnen er at dette kan bidra til å fokusere oppmerksomheten mot endel detaljer som vi oppfatter som viktige, og som det ellers ikke vil være så lett å gjøre rede for på en tilfredstillende måte. Vi innfører endel forkortelser og skal bruke uttrykket "BÅp;w(x,y,t)" som forkortelse for "x begynner med å åpne vinduet y ved tidspunktet t i verdenen w", videre skal vi bruke "Åp;w(x,y,t)" som forkortelse for "x er iferd med å åpne vinduet y ved tidspunktet t i verdenen w", og tilslutt bruker vi uttrykket "SÅp:w(x,y,t)" til å forkorte "x gjør seg ferdig med det å åpne vinduet y ved tidspunktet t i verdenen w"

La oss nå se på den følgende åpne setning:

(1) BÅp;w(x,y,t;1) &(At)(tê<t;1,t;2> ->Åp;w(x,y,t)) & SÅp:w(x,y,t;2)

Som man ser uttrykker denne setningen at x begynner med å åpne vinduet y ved tidspunktet t i verdenen w, videre at det i denne verden er slik at x er i ferd med å åpne vinduet y ved alle tidspunkter i det åpne tidsintervallet <t;1,t;2>, og endelig at x avslutter det å åpne vinduet y

ved tidspunktet t;2. Anta nå at verdiene til variablene x, y, t;1 og t;2 er fiksert og betrakt klassen av alle de verdener w som oppfyller setningen (1). Denne mengden av mulige verdener vil være sannhetsmengden til et bestemt utsagn, la oss kalle det H(x,y,t;1,t;2). Dette utsagn synes det svært naturlig å si at beskriver et forhold som x sørger for å realisere i verdenen w. Det følger i så fall at det ordnete par som har dette utsagn som sin første komponent og individet x som sin andre komponent vil være et eksempel på en mulig handling i vår forstand. Vi tillater oss å formalisere, i det vi først setter:

(2) H(x,y,t;1,t;2) = s;-1(Mg(w: BÅp;w(x,y,t;1) &
(At)(tê<t;1,t;2> ->Åp;w(x,y,t)) & SÅp:w(x,y;2)))

Som det ble nevnt synes det rimelig å hevde:

(3) (wêI & True(H(x,y,t;1,t;2),w)) -> Br(H(x,y,t;1,t;2),x,w)

Fra (3) følger så at <H(x,y,t;1,t;2),x> er en mulig handling om den definisjonen vi har gitt legges til grunn. Det synes ikke å være noe i veien for at de andre eksemplene på handlinger som vi nevnte ovenfor kan behandles på den samme måten.

La oss se på noen konsekvenser av det som vi så langt har fremlagt. Vi har at s;-1(Mg(w: BÅp;w(x,y,t;1))) er identisk med utsagnet at x starter med å åpne vinduet y ved tidspunktet t;1. Som man lett ser har vi at dette utsagnet er en logisk konsekvens av utsagnet H(x,y,t;1,t;2). Dette følger umiddelbart i lys av definisjonen (2). Siden vi har at den følgende sats gjelder generelt for relasjonen Br om w er en mulig verden og x er et eller annet individ, nemlig:

(+) (Aa)(Ab)(a,bêU & Br(a,x,w) & LK(b,a) -> Br(b,x,w))

følger i lys av (3) at vi også må ha :

(4) (wêI & True(H(x,y,t;1,t;2),w)) -> Br(s;-1(Mg(w: BÅp;w(x,y,t;1)),x,w)

Fra dette og den definisjon vi har gitt av handling følger da at paret h;2=<s;-1(Mg(w: BÅp;w(x,y,t;1)),x> også må regnes som en handling. Det som skiller denne handlingen fra den vi betraktet ovenfor er imidlertid at h;2 ikke kan sies å ha utstrekning i tid i den forstand at den strekker seg over et lengere tidsintervall. Teorien impliserer altså eksistensen av handlinger som "bare har et øyeblikks varighet".

På samme måte som rett ovenfor kan vi også utlede den følgende sats:

(5) (wêI & True(H(x,y,t;1,t;2),w)) & t;1<t<t;2 -> Br(s;-1(Mg(w: Åp;w(x,y,t;1)),x,w)

Dette innebærer, som man ser, at dersom (1) er sann vil alltid det ordnete par som har utsagnet at x er iferd med å åpne vinduet y ved tidspunktet t som første komponent og individet x som andre komponent være en mulig handling i følge den teori som her betraktes. Også dette vil være et eksempel på en "momentan"-handling hvor begynnelsestidspunkt og avslutningstidspunktet faller sammen.

La oss før vi går videre bemerke at det fra prinsippet (+), som er bevisbart i teorien HT følger at det tautologiske utsagn dvs. utsagnet s;-1(I) - man erindrer at "I" betegner klassen av mulige verdener - er en logisk konsekvens av ethvert utsagn. Det følger derfor at i enhver verden hvor en person utfører en eller annen handling vil vedkommende også utføre handlingen <s;-1(I),x>. Denne handlingen kunne vi kalle den tautologiske handling. Dette innebærer altså at man kan si at det å foreta seg noe altid har som konsekvens at man utfører den tautologiske handlingen.

Holder vi oss til eksemplet ovenfor kan vi definere en funksjon f : [t;1,t;2] -> U på den følgende måte, i det vi setter:

(i) f(t;1) = s;-1(Mg(w: BÅp;w(x,y,t;1))
(ii) (At)(tê<t;1,t;2> -> f(t) = s;-1(Mg(w:Åp;w(x,y,t))) og
(iii) f(t;2) = s;-1(Mg(w: SÅp;w(x,y,t;1)).

Man ser at denne funksjonen tilordner tidspunktet t;1 det utsagn som sier at individet x begynner med å åpne vinduet y ved t;1, videre tilordner funksjonen f ethvert tidspunkt t i det åpne intervallet <t;1,t;2> det utsagn som sier at individet x er i ferd med å åpne vinduet y ved tidspunktet t, og endelig tilordner funksjonen f tidspunktet t;2 det utsagn som sier at individet x gjør seg ferdig med å åpne vinduet y ved tidspunktet t;2. Snittet av utsagnene i verdiområdet til denne funksjonen er som man ser ved litt ettertanke utsagnet H(x,y,t;1,t;2). Vi har altså SNu/tê[t;1,t;2]/(f(t)) = H(x,y,t;1,t;2).

Vi kan generalisere noe i denne forbindelse. Anta g er en funksjon der g: [t;1,t;2] -> U. Anta at det finnes xêP og wêI slik at følgende holder: Br(SNu/tê[t;1,t;2] /(g(t)), x, w) . Dette innebærer at konjunksjonen av de diverse utsagnene i verdiområdet til funksjonen g beskriver et forhold som individet x realiserer i verdenen w. I så fall har vi at <SNu/tê[t;1,t;2] /(g(t)), x> er en mulig handling ifølge vår definisjon.

Som man ser fra det vi har sagt så langt kan noen handlinger representeres ved funksjoner av typen g: [t;1,t;2] -> U. Dette innebærer imidlertid ikke at alle handlinger kan representeres ved slike funksjoner. Men det synes ikke urimelig å si - slik som vi forsåvidt har antydet ovenfor - at enhver handling hvor man kan snakke om at man begynner å utføre handlingen ved et gitt tidspunkt og hvor man avslutter handlingen ved et senere tidspunkt, og hele tiden mellom de to tidspunkter er i ferd med å utføre handlingen, kan representeres ved en slik funksjon. Handlinger av denne type synes å kunne kjedes sammen. Det er ikke noe i teorien HT som forhindrer at det kan finnes en rekke av tidspunkter t;1 ... t;n og en tilsvarende rekke av funksjoner g;j : [t;j,t;j+1] -> U (1≤j<n) hvor vi har for hver funksjon g;j at Br(SNu/tê[t;j,t;(j+1)] /(g;j(t)), x, w) der x er et eller annet individ og w en eller annen mulig verden. I såfall vil de diverse g;j representere handlinger som kommer etter hverandre i tid. Ser man på unionen av de diverse g;j ettersom j gjennomløper Mg(k:1≤k<n), dvs. studerer man F=UN/1≤j<n/(g;j) ser man at F: [t;1,t;n] -> U og også at vi må ha Br(SNu/tê[t;1,t;n] /(F(t)), x, w). Dette innebærer at hele handlingsrekken også kan oppfattes som en handling.

Vi har så langt ikke forsøkt å gi noen konkrete eksempler på handlingsalternativer i forbindelse med vår fremstilling av teorien HT. Dette er det naturlig å gjøre på dette punkt fordi det er svært nærliggende å forestille seg at de handlingsalternativer som står åpne for en person ved et gitt tidspunkt nettopp utgjøres av en rekke handlingsrekker som forgrener seg og som er av en slik art at det står i aktørens makt å utføre dem. Men før vi eksemplifiserer er det nødvendig å se på en del generelle spørsmål som har med vår definisjon av handlingsalternativ å gjøre.

Fra den definisjonen vi har gitt av handlingsalternativ ser man at dette er visse utsagnsmengder. La oss kalle klassen av alle de k({a}) der a er et utsagn som beskriver et forhold som det står i x´s makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w, for *handlingspotensialet* til x relativt til paret <t,w>. Kort sagt vil handlingspotensialet til en person x relativt til <t,w> være Rgn(Q(w,x,t)). Vi har jo at operasjonen Q er definert ved: Q(w,y,t)= <k({a})>/aê C(w,y,t)/ der operasjonen C i sin tur er definert ved: C(w,y,t)=Mg(x: M;t(x,y,w)). Da følger det, som man lett ser at

Rgn(Q(w,x,t)) = Mg(c:(Ea)(<a,c>ê Q(w,x,t))) =

Mg(c : (Ea)(c=k({a}) & aêC(w,x,t))) = Mg(k({a}): M;t(a,x,w)).

Nå var et handlingsalternativ, slik vi definerte det, et element i en basis C for Q(w,x,t). Siden en basis for Q(w,x,t) var inkludert i Rgn(Q(w,x,t)) følger det at et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w alltid vil være et element i mengden Mg(k({a}): M;t(a,x,w)), mao. handlingspotensialet til x relativt til <t,w>. Nå har vi imidlertid at hvis a er et utsagn så er a=SNu(k({a})). Dette innebærer at handlingspotensialet til x relativt til <t,w> er en-entydig korrelert med elementene i Mg(a:M;t(a,x,w)) . Vi kan derfor identifisere de handlingsalternativer som står åpne for en person x relativt til tidspunktet t i verdenen w med visse elementer i mengden Mg(a:M;t(a,x,w)). Rent formelt har vi at det følgende teorem holder i HT. Dette teoremet gir oss en alternativ karakteristikk av

handlingsalternativ -begrepet:

TEOREM 4.1: *Anta xêP &têT &wêI. Da gjelder følgende:*
Alt;w(h,x,t) <-> (Ea)(a=SNu(h) &M;t(a,x,w) &¬(Eb)(M,t(b,x,w)& s(b) SInkl s(a)))

Bevis : Det bør noteres at vi senere, i Teorem 5.4.4, beviser kondisjonalen mot venstre i dette teoremet. Kondisjonalen mot høyre skulle ikke by på spesielle problemer. La oss likevel gi et bevis for denne delen av teoremet.

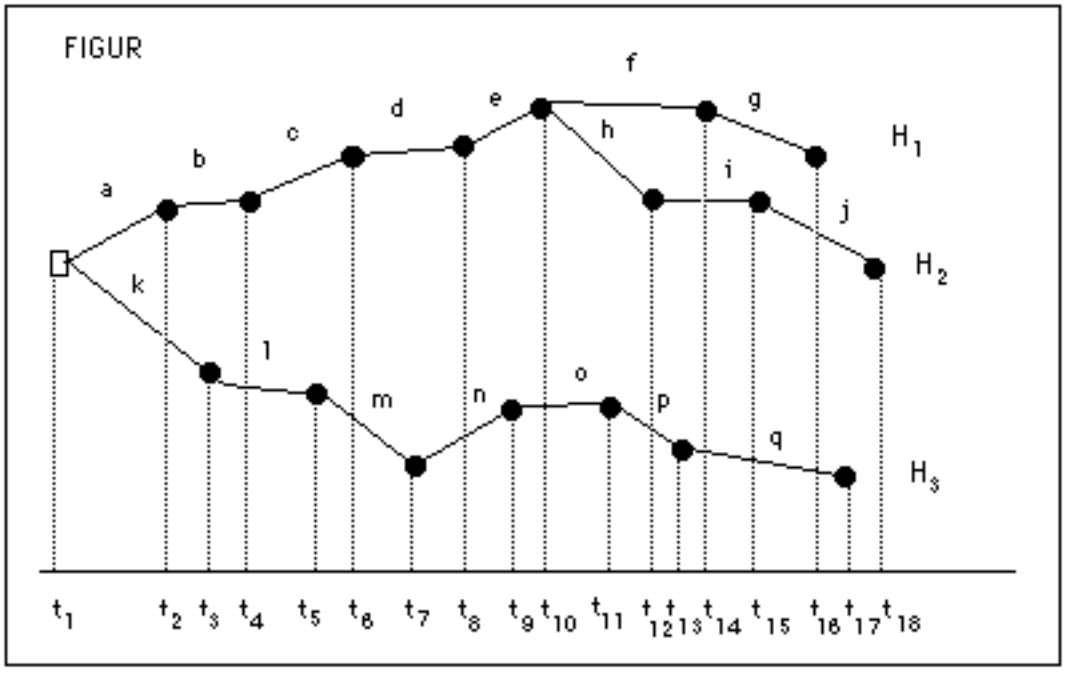
Anta forutsetningene i satsen holder og at Alt;w(h,x,t). Fra definisjonen av Alt-relasjonen følger da at det finnes C der Bas(C,Q(w,x,t)) & hêC). Fra definisjonen av Bas følger det at vi har:

(o) CêPt(Pt(U))
(i) (Ax)(xêC.-> s(SNu(x)) ≠ø)
(ii) C≠ø & C Inkl Rgn(Q(w,x,t))
(iii) (Ay)[yê Rgn(Q(w,x,t)).->. (Ex)(xêC & s(SNu(x)) Inkl s(SNu(y)))]
(iv) (Az)[zêC.->. -(Ey)(yê Rgn(Q(w,x,t)) &s(SNu(y)) SInkl s(SNu(z)))]
(v) (Ax)(Ay)[x,y êC & x≠y .-> s(K(SNu(x),SNu(y)))=ø]

Siden hêC har vi i lys av (ii) at hêRgn(Q(w,x,t)). Fra dette og definisjonen av operasjonen Q har vi at det finnes a slik at h=k({a}) & M;t(a,x,w). Men siden SNu(k({a}))=a om aêU, følger at vi har (1) a=SNu(h) & M;t(a,x,w). Anta nå mot formodning at det finnes b der (2) M,t(b,x,w) & (s(b) SInkl s(a)) Da har vi ved hjelp av definisjonen av Q at (3) k({b})êRgn(Q(w,x,t)). Videre følger det fra (2), siden b=SNu(k({b})) at (4) s(SNu(k({b}))) SInkl s(SNu(k({a}))) Men fra (3),(4) og (iv) følger at ¬(k({a})êC) . Men siden h=k({a}) følger da ¬(hêC) som åpenbart gir oss en motsigelse. Dette viser at satsen holder. **QED**.

Etter disse formelle overveielser går vi nå over til den oppgave som består i å gi forholdsvis konkrete eksempler på mulige handlingsalternativer.

Som tidligere nevnt synes det ikke helt urimelig å si at et handlingsalternativ som står åpent ved et gitt tidspunkt t er en rekke av mulige handlinger som strekker seg innover i fremtiden, hvor hver handling følger etter den foregående i tid, og hvor den første mulige handlingen starter ved tidspunktet t. Relativt til det nuværende tidspunkt kan jeg først reise meg opp og gå bort til verandadøren, dernest kan jeg åpne denne i luftestilling og feste dørkroken, dernest kan jeg bli stående en stund og betrakte naboens hus, for så å gå tilbake til mitt arbeidsbord og sette meg ned på stolen igjen. Dette ville være en mulig handlingsrekke som det med en viss rimelighet kunne sies at det står i min makt å utføre fra og med det nuværende tidspunkt. Det virker slett ikke urimelig å se på dette som et eksempel på et handlingsalternativ. En annen mulighet er at jeg gjør akkurat det samme, men etter å ha blitt stående en stund og betraktet naboens hus, vender jeg ikke tilbake til arbeidsbordet, men går derimot bort til bokhyllen, tar ut min utgave av Kants "Kritikk av den rene fornuft", og leser dernest gjennom den innledning som Kant har skrevet i denne bok. En tredje handlingsrekke som det synes å stå i min makt å utføre fra og med det nuværende tidspunkt er denne. Jeg starter med å åpne døren til stuen, dernest går jeg ut i kjøkkenet, dernest ser jeg etter om det er noe kaffe i termosen og skjenker meg en kopp hvis det er noe, eller lar være dersom det ikke er noe igjen, for så å gå tilbake til mitt arbeidsrom, lukke stuedøren og sette meg ned ved skrivebordet. Også dette virker det ikke direkte uplausibelt å si at kunne være et handlingsalternativ som står åpent for meg ved det nuværende tidspunkt. Det er eksempler av denne type som man kanskje umiddelbart er tilbøyelig til å gi om man blir utfordret til å komme med eksempler. Hvis vi kaller de tre handlingsalternativene som ble nevnt for hhv. H;1 - H;3 kunne man tenke seg å anskueliggjøre disse ved hjelp av den følgende figuren ovenfor.



På denne figuren er det meningen at a f. eks. representerer den handlingen som består i at jeg starter med å reise meg opp fra stolen ved t;1, videre at jeg i intervallet <t;1,t;2> er i ferd med å reise meg opp fra denne, for ved tidspunktet t;2 å gjøre meg ferdig med å reise meg opp fra stolen. h på figuren representerer den handlingen som består i at jeg i tidsintervallet [t;10,t;12] går bort til bokhyllen. Videre er det meningen at a for eksempel er en funksjon som oppfyller de følgende krav: For det første skal vi ha at a: [t;1,t;2] -> U. For det andre krever vi at M;t;1(SNu/tê[t;1,t;2]/(a(t)),x,w). Dette innebærer at den mulige handlingen som a representerer er en mulig handling som det står i min makt å utføre relativt til tidspunktet t i verdenen w. Tilsvarende bemerkninger gjelder for de andre tilsvarende elementene på figuren: b, c, d , e, osv. I forbindelse med denne figuren er det også meningen at H;1 f.eks. er en funksjon der vi har H;1 : [t;1,t;16] ->U og hvor vi har:

M;t;1(SNu/tê[t;1,t;16]/(H;1(t)),x,w),

mao. hvor konjunksjonen av alle de diverse utsagn H;1(t) ettersom t gjennomløper intervallet [t;1,t;16] er et utsagn som det står i min (dvs. x´s) makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w. Tilsvarende tenker vi oss at H;2 er en funksjon der H;2 [t;1,t;18] ->U og hvor vi også har

M;t;1(SNu/tê[t;1,t;18]/(H;2(t)),x,w).

Endelig tenker vi oss at H;3 er en funksjon der H;3 [t;1,t;17] ->U og hvor vi tilsvarende har M;t;1(SNu/tê[t;1,t;17]/(H;3(t)),x,w).

Hvis vi holder oss til den definisjonen vi tidligere har gitt av handlingsalternativ - og denne definisjonen får vi selvfølgelig holde oss til - er strengt tatt ikke funksjonene H;1 til H;3 handlingsalternativer i det hele tatt. Det som eventuelt kunne være et handlingsalternativ er snarere konsekvensmengden til mengden {SNu(Rng(H;1))}. Men som vi bemerket ovenfor har vi at relasjonen Mg(<a,k({a})>: aêU) er en korrelasjon. Dette innebærer at i stedet for å si at

k({SNu(Rng(H;1))}) er et handlingsalternativ som står åpent for x relativt til <t;1,w> kan vi like gjerne si at SNu(Rng(H;1)) representerer et slikt alternativ.

La oss nå se på den antagelse at H;1 - H;3 representerer alle de handlingsalternativene som står åpne for x relativt til tidspunktet t i verdenen w. Dette innebærer at vi antar:

(+) Mg(h: Alt;w(h,x,t)) =

{k({SNu(Rng(H;1))}), k({SNu(Rng(H;2))}), k({SNu(Rng(H;3))})}

Merk at vi ikke betrakter (+) fordi vi anser dette som en særlig realistisk antagelse - i de fleste tilfelle vil det vel snarere være slik at langt flere enn bare tre alternativer står åpne for en ved et gitt tidspunkt - men snarere for å studere eventuelle konsekvenser av denne setning. Dette kan bidra til å kaste lys over det handlingsalternativ-begrep som vi har innført.

La oss altså se litt nærmere på hva som følger fra (+). En første ting som kan nevnes i denne forbindelse er det følgende: Siden de tre utsagnene, dvs. snittet eller konjunksjonen av de tre utsagnsmengdene som inngår i
Mg(h: Alt;w(h,x,t), representerer handlingsalternativer for x relativt til t i w kan det ikke finnes noen utsagn som impliserer strengt et eller annet av disse tre og som samtidig beskriver noe det står i x´s makt å realisere relativt til dette tidspunkt. For i så fall ville i det minste et av de tre utsagnene vi har nevnt ikke representere et handlingsalternativ. Tenker vi for oss f. eks. at utsagnet som uttrykker at jeg gjennomfører handlingsrekken H;1, men samtidig når jeg fester kroken på verandadøren gjør dette på en spesielt rask måte ved å føre hånden i en bestemt bue - la oss kalle dette utsagnet for g - er et utsagn som beskriver noe det står i min makt å realisere relativt til t;1, synes det rimelig å hevde at dette i så fall impliserer strengt SNu(Rng(H;1)). Men siden de tre utsagnene representerer en basis for alle de utsagn som beskriver forhold det står i min makt å realisere relativt til t;1 innebærer dette at g ikke kan være noe element i denne basis og derfor heller ikke er noe handlingsalternativ. Det følger derfor fra (+) at dette utsagnet ikke beskriver noe det står i min makt å realisere relativt til t. Dette utsagnet representerer derfor ikke noe handlingsalternativ som står åpent for meg relativt til det angjeldende tidspunkt. Det synes imidlertid ikke å være noe paradoksalt eller eiendommelig ved dette.

§5 Teoremer i teorien HT

I denne paragrafen skal vi bevise en rekke satser i teorien HT. Dette er viktig for delvis å kunne vise frem endel av det som faktisk kan utledes i den. Men det er også viktig for å kunne danne seg et bedre bilde av hva teorien sier og dermed bli bedre i stand til å kunne vurdere teoriens sannhetsverdi. Paragrafen er inndelt i en rekke underavsnitt hvor vi gruppevis behandler beslektede teoremer. Teoremene i hver gruppe kaster lys over forskjellige deler av teorien.

§5.1 Satser om relasjonene Br og M.

I dette avsnittet skal vi ta for oss noen satser av mer elementær natur som gjelder for predikatet "Br(a,x,w)". La oss først gi bevis for den følgende sats som viser at predikatet Br har visse likhetstrekk med det man kaller en T-operator i modal-logikken.

TEOREM 5.1.1. *Anta wêI og P(x). Da gjelder de følgende påstander:*

(i) $Br(a,x,w).\text{->}.\ \neg(Br(Neg(a),x,w))$

(ii) $a,bêU\ \&\ Br(a,x,w)\ \&\ Br(C(a,b),x,w)\ .\text{->}.Br(b,x,w)$

(iii) $Br(D(a,Neg(a)),x,w)$

(iv) $Br(t,x,w)\ \&\ \neg(Br(k,x,w)$

La oss fremsette noen kommentarer til denne satsen før vi ser på beviset. Med en monadisk operator på utsagn forstår vi en funksjon som avbilder mengden av utsagn på seg selv, mao en funksjon f: U->U. Negasjons-operatoren Neg er et eksempel på en monadisk operator på utsagn. Vi skal kalle en slik operator f for en modal-nødvendighetsoperator om den oppfyller følgende krav: (K1) Er x identisk med det tautologiske utsagn, ie. er x=s;-1(I), så er er f(x)

identisk med det tautologiske utsagn. (K2) Vi krever at C(K(f(x),f(C(x,y))),f(y)) = s;-1(I). I denne forstand er det temmelig lett å se at Teorem 5.1.1 viser at operatoren G;x definert ved: G;x= Mg(<a,s;-1(Mg(w: Br(a,x,w)))> : aêU) – og som derfor helt klart er relatert til relasjonen Br – er en modal nødvendighetsoperator. At kravet (K1) er oppfylt følger lett fra punkt (iii) i teoremet. At funkjonen G oppfyller kravet (K2) følger nokså lett fra det andre punktet i teoremet. Vi skal kalle en slik operator for en T-operator om vi i tillegg til kravene (K1) og (K2) også har at (K3) s(f(x)) Inkl s(x). Man ser da at operajonen G er en T-operator fordi vi har at ifølge aksiom AT 1 at Br(a,x,w).->. wês(a). Dette innebærer jo at Br(a,x,w).->. wês(a) og derfor i sin tur at:

s(G;x(a)) = Mg(w: Br(a,x,w) inkl s(a).

Dette er av interesse fordi det viser at alle de lover som gjelder for T-operatorer også vil gjelde for operatoren G. Dette i sin tur innebærer at alle de lovene man utleder for nødvendighets-operatoren i modallogikken T, først utformet av von Wright, også kan utledes for operatoren G.

La oss komme med noen tilleggsbemerkninger her. Anta N er en eller annen monadisk utsagnsfunksjon. Vi skal da si at N er en T-nødvendighets-operator i streng forstand om N oppfyller de følgende krav:

(i) N(x) Inkl x for alle utsagn xêU

(ii) Er a Inkl U, xêU, wêI og har vi SNu(Mg(y: wês(N(y))) Inkl s(x) så gjelder wêN(x) .

Er N en T-nødvendighetsoperator i streng forstand fremgår det at N også er en T-nødvendighetsoperator. Fra de aksiomene i HT som angår Br fremgår det at G ovenfor ikke bare er en T-nødvendighetsoperator, men også en T-nødvendig-hetsoperator i streng forstand.

Bevis : Anta at wêI. Anta videre at Br(a,x,w). Fra aksiom AT 1 følger da at (1) wês(a). Anta for reduktio ad absurdum at (2) Br(Neg(a),x,w). Ved hjelp av AT 1 følger i så fall wês[Neg(a)].Men fra definisjonen av negasjonsoperatoren Neg følger da at ¬(wês(a)) som strider mot (1). Det følger at (2) er usann og at vi derfor har : ¬(Br(Neg(a),x,w)). Dette viser at punkt (i) i teoremet holder.

Anta a,bêU og at (3) Br(a,x,w) & Br(C(a,b),x,w). Vi har da at:

(4) a,C(a,b)êMg(a': Br(a',x,w)).

Det følger da at (5) s(SNu(Mg(a': Br(a',x,w))) Inkl s(a) og at

(6) s(SNu(Mg(a': Br(a',x,w))) Inkl s(C(a,b)) Fra disse to forhold følger i sin tur at (7) s(SNu(Mg(a': Br(a',x,w))) Inkl Sn{s(a),s(C(a,b))}. Nå har vi imidlertid at : (8) Sn{s(a),s(C(a,b))} Inkl s(b) . For anta for vilkårlig w' at w'ê Sn{s(a),s(C(a,b))}. Da følger at w'ês(a) og w'ê s(C(a,b)). Det siste innebærer i følge definisjonen av operasjonen C at w'ês(a).->.w'ês(b). Men da har vi åpenbart w'ês(b). Dette viser at (8) holder. Fra (8) og (7) følger (9) s(SNu(Mg(a': Br(a',x,w))) Inkl s(b) . Men fra dette og aksiom AT 2 følger siden bêU at Br(b,x,w). Vi har dermed bevist punkt (ii) i teoremet.

Vi har at (10) s(D(a,Neg(a))) =I. Siden s(SNu(Mg(a': Br(a',x,w))) Inkl I følger derfor ved hjelp av AT 2 at (11) Br(D(a,Neg(a)),x,w). Dette viser riktigheten av punkt (iii). Vi har t=D(a,Neg(a)), siden det følger direkte fra definisjonen av det tautologiske utsagn t at s(t)=I . I lys av (11) har vi da Br(t,x,w). Siden s(k)=ø følger umiddelbart den siste konjunkten i punkt (iv) ved hjelp av AT 1. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 5.1.1. **QED**.

Vi kalte tidligere Mg(a: Br(a,x,w)) for den totale livsløpbeskrivelsen til personen x i verdenen w. Denne terminologien er ikke søkt eller urimelig, for Mg(a: Br(a,x,w)) er jo nettopp mengden av absolutt alle utsagn som beskriver noe x gjør i verdenen w. Det følgende teorem viser at hvis utsagnsmengden a er en delmengde av den totale livsløpsbeskrivelsen til x i verdenen w så er også konjunksjonen av alle utsagnene i a med i denne totale livsløpbeskrivelse. Det omvendte gjelder også: Er a en utsagnsmengde og har vi at

konjunksjonen av utsagnene i denne mengden – SNu(a) – er et element i x's totale livsløpbeskrivelse i verdenen w, ja så har vi også at a er inkludert i denne mengden. Merk i denne forbindelse at vi ikke har lagt noen krav på kardinaltallet til mengden a. Det er i og for seg intet som tilsier at denne mengden skal være endelig. Den kan godt være tellbart uendelig eller være av en hvilken som helst mektighet. Det andre punktet i teoremet viser at denne påstand spesielt holder for endelige mengder.

TEOREM 5.1.2 *Anta A Inkl U, videre at wêI, P(x) og at a,bêU. Da gjelder:*
(a) (Ay)(yêA.->. Br(y,x,w)) <-> Br(SNu(A),x,w)
(b) (Br(a,x,w) & Br(b,x,w)) <-> Br(K(a,b),x,w)

Bevis : Det skulle være lett å se at punkt (b) følger fra punkt (a). Man behøver bare å sette inn "{a,b}" for "A". Vi gir derfor bare et detaljert bevis for (a). Anta (Ay)(yêA.->. Br(y,x,w). Fra dette følger at A Inkl Mg(y: Br(y,x,w)) og herav har vi s(SNu(Mg(y: Br(y,x,w)))) Inkl s(SNu(A)). Da følger ved hjelp av AT 2 Br(SNu(A),x,w). Anta på den annen side at Br(SNu(A),x,w) og at y er et vilkårlig element i A. Vi har da at {SNu(A)} Inkl Mg(z: Br(z,x,w)). Herav følger så at:

s(SNu(Mg(z: Br(z,x,w)))) Inkl Sn{s(SNu(A))} =s(SNu(A)).

(Dette følger siden vi generelt har at Sn({x})=x om x er en mengde) Videre har vi om yeA at: s(SNu(A)) inkl s(y). Vi må derfor ha at s(SNu(Mg(z: Br(z,x,w)))) Inkl s(y). Fra dette og AT 2 følger så Br(y,x,t). Siden y var et vilkårlig element i A har vi derfor bevist: (Ay)(yeA.->. Br(y,x,w)). Dette avslutter vårt bevis for Teorem 5.1.2. **QED**.

Satsen ovenfor viste at den totale livsløpsbeskrivelse til x i verdenen w er lukket under operasjonen SNu. Punkt (a) i den følgende sats viser at hvis a er et utsagn som er med i x's totale livsløpsbeskrivelse og b er et utsagn hvis sannhetsmengde inkluderer den til a – mao. hvis b er en logisk konsekvens av a – så er også utsagnet b med i den totale livsløpsbeskrivelsen. Det andre punktet i satsen viser at hvis A er en vilkårlig utsagnsmengde som er inkludert i livsløpsbeskrivelsen til x i verdenen w så er også ethvert utsagn som er logisk sett implisert av utsagnene i A også med. Vi minner i denne forbindelse om at et utsagn b sies å være en logisk konsekvens av utsagnene i mengden A hvis sannhetsmengden til konjunksjonen av utsagnene i A, ie. s(SNu(A)) er inkludert i sannhetsmengden til b.

TEOREM 5.1.3 *(a) Br(a,x,w) & bêU & s(a) Inkl s(b).->.Br(b,x,w)*
(b) A Inkl U & bêU & (Aa)(aêA.->. Br(a,x,w))
& s(SNu(A)) Inkl s(b).->. Br(b,x,w)

Bevis : I denne satsen følger (a) fra (b) om man setter A={a}. Vi gir derfor ikke noe separat bevis for denne delen av teoremet. Når det gjelder punkt (b) ser man at fra hypotesene følger: A Inkl Mg(a: Br(a,x,w). Dette impliserer:

s(SNu(Mg(a: Br(a,x,w))) Inkl s(SNu(A)).

Fra dette og den siste hypotesen i (b) følger s(SNu(Mg(a: Br(a,x,w))) Inkl s(b). Men ved hjelp av AT 2 følger herav Br(b,x,w). **QED**.

La oss nå se på noen forhold i forbindelse med relasjonen M. Vi kalte Mg(a: M;t(a,x,w)) for handlingspotensialet til personen x i verdenen w. I forbindelse med relasjonen M innførte vi AT 4 som i det vesentlige sier at ethvert utsagn som er en logisk konsekvens av et utsagn som er med i handlingspotensialet til personen x i verdenen w selv er med i dette potensiale. Mao. fastsatte vi at Mg(a: M;t(a,x,w)) er lukket under logisk konsekvens. Innfører vi en utsagnsoperasjon, la oss akkurat her kalle den P, ved :

P;(x,t)= Mg(<a, s;-1(Mg(w: M;t(a,x,w)))> :aêU)

er det nokså nærliggende å sammenligne denne operasjonen P med en modal mulighetsoperator. Man ser jo at hvis wês(P;(x,t)(a)) og LK(b,a) så har vi også at wês(P;(x,t)(b)) og dette burde holde om P var en slik operator. Imidlertid skal vi senere se at det er svært problematisk å oppfatte P som en genuin mulighetsoperator. Men definerer vi den duale operasjon, N;t(a,x,w), til M;t(a,x,w) ved :

N;t(a,x,w) = ¬(M;t(Neg(a),x,w))

ser man at denne har det trekk tilfelles med en modal nødvendighets-operator at den er lukket under logisk konsekvens. Den følgende sats viser dette:

TEOREM 5.1.4 *Anta a,bêU og at wêI. Anta têT= Mg(x: Tp(x)). Da gjelder:*
N;t(a,x,w) & s(a) Inkl s(b) .->. N;t(b,x,w)

Bevis : I lys av AT 4 har vi:

(1) M;t(a,x,w) & bêU & s(a) Inkl s(b) :->. M;t(b,x,w)

som selvfølgelig holder for alle a,b. Setter vi nå inn "Neg(b)" for "b" og "Neg(a)" for "a" i (1) får vi:

M;t(Neg(a),x,w) & bêU & s(Neg(a)) Inkl s(Neg(b)) :->. M;t(Neg(b),x,w)

Dette er ekvivalent med:

¬M;t(Neg(b),x,w) & bêU & s(b) Inkl s(a) :->. ¬M;t(Neg(a),x,w), som i sin tur impliserer konsekventen i Teorem 5.1.4 i lys av definisjonen av "N;t(a,x,w)". **QED**.

Dette avslutter vår oversikt over de teoremer som vi i første omgang vil kommentere i forbindelse med relasjonene Br og M.

§5.2 Satser som belyser egenskapene til relasjonene Re og Alt.

I forbindelse med teorien HT har vi gitt definisjoner av de to konstruksjonene "h er et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t i verdenen w", "Alt;w(h,x,t)" og "h er et handlingsalternativ som x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w", i symboler "Re;w(h,x,t)". Dersom de definisjonene vi har gitt skal kunne anses som adekvate virker det for det første svært rimelig å kreve at dersom h er et handlingsalternativ som x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w så er h et handlingsalternativ som står åpent for x relativt til tidspunktet t i verdenen w. For det andre virker det rimelig å kreve at hvis h;1 og h;2 er handlingsalternativer som x realiserer fra og med t i verdenen w så er disse identiske, ie. vi har h;1=h;2. Det følgende teorem viser at våre definisjoner oppfyller disse krav.

TEOREM 5.2.1 *(a) Re;w(h,x,t).->.Alt;w(h,x,t)*
(b) Re;w(h;1,x,t) & Re;w(h;2,x,t).->. h;1=h;2.

Bevis : I denne satsen følger (a) umiddelbart fra definisjonen av Re;w. Man kan i denne forbindelse konsultere §2. Vi konsentrerer oss derfor om beviset for punkt (b). Anta Re;w(h;1,x,t) & Re;w(h;2,x,w). Fra definisjonen av Re; har vi da:

(1) Alt;w(h;1,x,w) & Alt;w(h;2,x,w) og dessuten at:

(2) (Ay)(yêh;1.->. Br(y,x,w)) & (Ay)(yêh;2.->.Br(y,x,w). Fra (2) og punkt (a) i Teorem 5.1.2 følger at vi må ha:

(3) Br(SNu(h;1),x,w) & Br(SNu(h;2),x,w). Fra dette og AT 1 følger så:

(4) wês(SNu(h;1)) &wês(SNu(h;2))

Dette i sin tur innebærer at: (5) Sn(s(SNu(h;1)),s(SNu(h;2)))≠ø

På den annen side følger fra (1) og definisjonen av Alt;w at det finnes C;1 og C;2 slik at :

(5) Bas(C;1,Q(w,x,t)) & Bas(C;2,Q(w,x,t) & h;1,h;2 êC;1=C;2.

Den siste konjunkten i (5) følger fra de to første i lys av Teorem 1 i §2. Fra (5) har vi i lys av definisjonen av "Bas", klausul (v), at :

(6) (Ax)(Ay)[x,y êC;1 & x≠y .-> s(K(SNu(x),SNu(y)))=ø]

Dette innebærer mer spesielt at:

(7) h;1.h;2êC;1 & h;1≠h;2. -> . s(K(SNu(h;1),SNu(h;2)))=ø

Men vi har åpenbart at h;1.h;2êC;1 og at:

(8) s(K(SNu(h;1),SNu(h;2)))=Sn(s(SNu(h;1)),s(SNu(h;2)))≠ø

Fra (7) og (8) følger det vi ønsker, nemlig h;1=h;2. **QED**

Vi har ovenfor omtalt to krav som det synes rimelig å stille i forbindelse med handlingsalternativer og det å realisere handlingsalternativer. Et tredje krav er det følgende: La A være mengden av alle de handlingsalternativer står åpne for en person ved et gitt tidspunkt. Da synes det rimelig å kreve at aktøren realiserer et av alternativene i A. Sagt på en annen måte: Står et eller annet handlingsalternativ åpent for en aktør må det være slik at aktøren realiserer et eller annet av de alternativene som står åpne. Det følgende teorem viser at våre definisjoner av relasjonene Alt og Re oppfyller dette krav:

TEOREM 5.2.2. *Vi har:*

(Eh)(Alt;w(h,x,t)).->.(Eh)(Alt;w(h,x,t) & Re;w(h,x,t))

Bevis : Fra hypotesen i teoremet følger (1) Alt;w(h,x,t) for noe h. I følge definisjonen av "Alt;w(h,x,t)" og Teorem 2.1 i §2 finnes da en entydig bestemt C som er slik at:

(2) Bas(C,Q(w,x,t)) & hêC.

Fra AT 7 følger da eksistensen av h;0 der (3) h;0êC & wê(Br*(SNu(h;0),x)). Fra den første konjunkten i (3), samt (2) har vi (4) Alt;w(h;0,x,t). Fra den andre konjunkten i (3) følger i lys av definisjonen av "Br*(h,x)" at (5) Br(SNu(h;0),x,w) og herav følger i sin tur ved hjelp av Teorem 5.1.2 at (6) (Aa)(aêh;0.->. Br(a,x,w)). Fra (4),(5) og (6) følger så (Eh) (Alt;w(h,x,t) & Re;w(h,x,t)) ved hjelp av definisjonen av "Re;w(h,x,t)". **QED**.

Teorem 5.2.1 og Teorem 5.2.2 er satser som viser at relasjonene Alt og Re oppfyller , slik vi her har definert dem, endel av de krav som det er meget nærliggende å stille . Er h;1 og h;2 handlingsalternativer som individet x realiserer fra og med tidspunktet t synes det rimelig å kreve at de er identiske. Og er det slik at visse handlingsalternativer i det hele tatt står åpne for en person ved et gitt tidspunkt t synes det rimelig å tro at vedkommende da fra og med tidspunktet t realiserer et av disse handlingsalternativene . Merk at setningen AT 7 inngår på en vesentlig måte i beviset for Teorem 5.2.2 og at dette aksiomet derfor spiller, og må spille, en vesentlig rolle i vår teori.

Det neste teoremet viser også at et annet krav som det er rimelig å stille til Alt og Re lar seg utlede i vår teori. Det synes rimelig å kreve, hvis h er et handlingsalternativ som står åpent for x relativt til tidspunktet t i verdenen w, at det er logisk mulig for x å realisere dette alternativ. Selvfølgelig innebærer ikke dette at personen x realiserer alternativet. Dette er i det vesentlige innholdet i det teorem som følger:

TEOREM 5.2.3. *Vi har:*

wêI & Alt;w(h,x,t).->. (Ew')(w'êI & Re;w'(h,x,t))

Bevis : Anta Alt;w(h,x,t). Fra definisjonen og Teorem 2.1 i §2 følger det at det finnes en C slik at (1) Bas(C,Q(w,x,t)) & hêC. Fra (1) og AT 5 følger eksistensen av w' der (2) w'êI & w'ês(Br*(SNu(h),x)) & Q(w,x,t)=Q(w',x,t). Fra den tredje konjunkten i (2) og (1) følger Bas(C,Q(w',x,t)) & hêC. Da har vi (4) Alt;w'(h,x,t).Fra den andre konjunkten i (2) følger (5)

(Ay)(yêh.->. Br(y,x,w')). Fra (4) og (5) og definisjonen av Re følger (Ew)(wêI & Re;w(h,x,t)). **QED**.

Studerer man beviset for Teorem 5.2.3 ser man at vi også har bevist:

TEOREM 5.2.4. *Vi har:*
Alt;w(h,x,t).->.(Ew')(Alt;w'(h,x,t) & Re;w'(h,x,t)).

Man bør bemerke at Teorem 5.2.4 sier noe mer enn Teorem 5.2.3. Teorem 5.2.3 hevder bare at hvis h er et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t så finnes det en mulig verden hvor x realiserer alternativet h fra og med t. Teorem 5.2.4 sier noe mer, nemlig at under den nevnte forutsetning finnes det ikke bare en verden w' hvor x realiserer h fra og med tidspunktet t, men også at i denne verdenen w er h et handlingsalternativ.

Det bør også bemerkes at vi i beviset for Teorem 5.2.3 og Teorem 5.2.4 har benyttet oss av AT 5. Man gjenkjenner forøvrig i Teorem 5.2.4 en setning som vi tidligere har brukt som grunnsetning i vårt arbeid "En generell teori om etiske normer."

La oss også gjøre oppmerksom på at Teorem 5.2.4 reflekterer visse vesentlige trekk ved AT 5 gitt våre definisjoner. For å være mer nøyaktig kan man si at den følgende formel er ekvivalent med AT 5.

Sett per definisjon: A;w(x,t)= Mg(h: Alt;w(h,x,t)). Man ser at A;w(x,t) er mengden av alle de alternativer som står åpne for individet x ved tidspunktet t i verdenen w.

La Q være lukningen av den følgende formel:

(1) hêA;w(x,t).->. (Ew')(w'êI & A;w'(x,t)=A;w(x,t) & Re;w'(h,x,t)).

Man ser at denne setningen er enda sterkere enn Teorem 5.2.4. Den sier at hvis h er et alternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w finnes det en verden w' hvor x har akkurat de samme alternativer ved tidspunktet t som i verdenen w og hvor det faktisk er slik at x realiserer alternativet h i verdenen w'.

Som allerede nevnt kan vi bevise at denne setningen er ekvivalent med AT 5. Dette er forsåvidt interessant siden AT 5 ikke direkte sier noe om handlings-alternativer. I lys av Teorem 5.2.5 nedenfor kan man si at setningen Q, i nærvær av de andre aksiomene i HT uttrykker mer direkte og eksplisitt innholdet i det noe klumsete aksiomet AT 5

TEOREM 5.2.5. *Vi har :*
Q <->. AT 5.

Bevis : Det fremgår av beviset for Teorem 5.2.3 og 5.2.4 at kondisjonalen mot venstre holder. Anta at Q er tilfelle for å vise at AT 5 må holde. Anta

(0) Bas(C,Q(w,x,t)) & yêC.

I lys av definisjonen av "A;w(x,t)" og "Alt;w(h,x,t)" har vi yêA;w(x,t). Fra dette og Q følger:

(1) w'êI & A;w'(x,t)=A;w(x,t) & Re;w'(y,x,t) for et eller annet objekt w'. Fra den andre konjunkten og definisjonen vi ga ovenfor følger:

(2) Mg(h: Alt;w'(h,x,t)) =Mg(h: Alt;w(h,x,t)).

Fra den tredje konjunkten i (1) følger at det må finnes en C;1 slik at:

(3) Bas(C;1,Q(w',x,t) & yêC;1.

Fra (0) og (3) følger at C og C;1 er entydig bestemt i lys av Teorem 2.1 i §2. Fra (2) og definisjonen av "Alt;w(h,x,t)" følger videre at C og C;1 må inneholde de samme elementene. Dette innebærer at C=C;1. Men herav kan vi utlede

(4) Q(w,x,t)=Q(w',x,t) ved hjelp av Teorem 5.2.6 nedenfor. Det følger også fra den tredje konjunkten i (1) at (Ac)(cêy .->.Br(c,x,w') og herav har vi

(5) w'ês(Br*(SNu(y),x)) Fra (4) og (5) følger:

(6) (Ew')(Q(w,x,t)=Q(w',x,t) & w'ê(Br*(SNu(y),x))) Men y var vilkårlig objekt som oppfylte (0). Det følger at vi har vist at AT 5 holder. Dette avslutter beviset. **QED**.

Når det gjelder det neste teoremet minner vi om at C(w,x,t) er definert som mengden Mg(a: M;t(a,x,w)). Mao. er C(w,x,t) det vi har kalt handlingsmulig-hetene til x ved tidspunktet t i verdenen w. Videre minner vi om at Q(w,x,t) er den funksjonen som til hvert utsagn a i handlingsmulighetene til x ved tidspunktet t i verdenen w tilordner konsekvenssystemet til a ie. k({a}). Siden vi har at F=Mg(<a,k({a})> : aêU) er en korrelasjon har vi at F avbilder C(w,x,t) en-entydig på Rgn(Q(w,x,t)). Det følgende teorem er vesentlig fordi det brukes i beviset for satsen ovenfor. Teoremet sier at dersom C er en basis for både Q(w,x,t) og Q(w',x,t), der w og w' er mulige verdener, så er verdiområdet til funksjonene Q(w,x,t) og Q(w',x,t) faktisk identiske og dermed disse funksjonene selv identiske.

TEOREM 5.2.6. *Anta w,w'êI . Da gjelder:*

Bas(C,Q(w,x,t) & Bas(C,Q(w',x,t). ->.

Q(w,x,t)=Q(w',x,t) &Rgn(Q(w,x,t))=Rgn(Q(w',x,t))

Bevis : Anta hypotesene holder og at aêRgn(Q(w,x,t)) for vilkårlig a. Etter definisjonen av "Q(w,x,t)" har vi da at det finnes noe b slik at

(1) a = k({b}) og (2) beC(w,x,t). Fra (2) følger (3) M;t(b,x,w). Siden vi har at Bas(C,Q(w,x,t) har vi i lys av definisjonen av "Bas" , klausul (iii) at det finnes c der cêC og som dessuten er slik at s(SNu(c)) Inkl s(SNu(a)) = s(b). Men
C Inkl Rgn(Q(w,x,t). Derfor cêRgn(Q(w,x,t)). Herav følger c= k({d}) der M;t(d,x,w) for noe d. Fra den andre hypotesen følger C Inkl Rgn(Q(w',x,t)). Da må vi også ha cêRgn(Q(w',x,t)). Det følger at c=k({f}) der M;t(f,x,w') for noe f. Siden c=k({d}) og c=k({f}) har vi at f=d og derfor at (4) M;t(d,x,w'). Nå hadde vi imidlertid at
s(SNu(c)) Inkl s(b) . Nå har vi: d= SNu(k({d}))=SNu(k({f}))=SNu(c). Det følger fra dette at s(d) Inkl s(b). Dette, (4) og AT 4 gir oss M;t(b,x,w'). Men da har vi:
a=k({b})ê Rgn(Q(w',x,t). Det følger at vi har bevist, siden a var et vilkårlig element at Rgn(Q(w,x,t)) Inkl Rgn(Q(w',x,t)) . Inklusjonen den andre veien bevises likedan, man behøver bare å bytte om "w" og "w'" i resonnementet ovenfor. Nå er funksjonen Mg(<k({a}),a>: aêC(w,x,t)) en-entydig. Vi har derfor i det vesentlige bevist C(w,x,t)=C(w',x,t). Det følger at Q(w,x,t)=Q(w',x,t). Dette avslutter beviset. **QED**.

Teorem 5.2.3 og Teorem 5.2.4 synes å uttrykke påstander som intuitivt sett virker svært rimelige. Adekvate definisjoner av relasjonene Alt og Re bør derfor formuleres på en slik måte at disse blir utledbare. Hvis våre definisjoner av Alt og Re er adekvate synes det derfor i lys av Teorem 5.2.5 vanskelig å komme utenom et aksiom av typen AT 5.

§5.3 Om de krav som bør stilles til relasjonen M. Er operatoren "Utsagnet at p beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t" en modaloperator?

Vi har lagt nokså svake krav på relasjonen M ovenfor. Vi har f.eks. ikke krevd at denne relasjonen skal være en T-mulighetsoperator, eller sagt på en annen måte, at den duale relasjonen N skal være en T-nødvendighetsoperator på samme måte som Br er det. I det følgende skal vi se på en del argumenter for at et slikt krav er urimelig og vil lede til helt uintuitive resultater om våre definisjoner av Alt og Re fastholdes. La oss definere:

DEFINISJON 5.3.1. H;0 = (Aa)(At)(Ax)(Aw)(a Inkl U & wêI.->.

N;t(SNu(a),x,w) <-> (Ay)(yêa.->.N;t(y,x,t))))

Man ser at H;0 er en påstand som sier at Mg(a: N;t(a,x,w)) er lukket under uendelig konjunksjon, dvs. konjunksjons- eller "snitt"-operatoren SNu. Hvis vi tenker oss at funksjonen Na;(x,t)= Mg(<a, s;-1(Mg(w:N;t(a,x,w))>:aêU) skal være en T-nødvendighetsoperator i streng forstand må N oppfylle kravet H;0. Det er faktisk lett å gi et bevis for dette.

Først tar vi sikte på å gi et bevis for:

TEOREM 5.3.1. *Anta H;0 og anta at*

(i) (Aa)(At)(Ax)(Aw)(aêU& N;t(a,x,w).->. wês(a)).

(ii) Bas(C,Q(w,x,t)) & C≠ø

Da gjelder:

(Ah)(hêC.->. (Ew)(s(SNu(h)) ={w}))

La oss se litt på hva dette teoremet sier. Den andre klausulen (ii) uttrykker at C er en basis for Q(w,x,t) og at C er ikke-tom. Dette innebærer, slik vi har definert begrepet handlingsalternativ, at C representerer klassen av alle de handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w. Er nå h et handlingsalternativ kaller vi konjunksjonen SNu(h) for den fullstendige beskrivelsen av handlingsalternativet h. Man ser da at konsekventen i dette teoremet sier at den fullstendige beskrivelsen av ethvert handlingsalternativ som står åpent for x ved t i verdenen w er et utsagn hvis sannhetsmengde inneholder nøyaktig en mulig verden. Dette innebærer i sin tur at for hvert alternativ h som står åpent for x er den fullstendige beskrivelsen av h et maximalt sterkt utsagn, og teorien som bare inneholder dette utsagn er komplett. Hvis forutsetningene i teoremet holder vil det derfor være slik at hvis en person kan velge mellom alternativer vil det være slik at alternativene som står åpne er hele mulige verdener. Ved å foreta et valg vil altså aktøren kunne bestemme hvordan verden vil utvikle seg i minste detalj i uendelig tid fremover. Aktøren vil med andre ord ha helt gudommelige evner. Dette gjør det naturligvis svært tvilsomt om H;0 er et prinsipp som kan godtas i forbindelse med relasjonen M.

La oss gi et bevis for teoremet:

Bevis : Anta forutsetningene i teoremet holder og at

(1) Bas(C,Q(w,x,t)) &C≠ø for vilkårlig C. La oss definere J ved:

(2) J=SNu(Mg(a:N;t(a,x,w))). Vi har at (3) J≠ø fordi wês(a) for alle a der N;t(a,x,w) ifølge forutsetning (i). Først skal vi ta sikte på å bevise:

(4) N;t(w,x,t) <-> s(J) Inkl s(a) for alle aêU.

Anta N;t(a,x,w). Da har vi at {a} Inkl Mg(b: N;t(b,x,w)) og følgelig at

s(SNu(Mg(b:N;t(b,x,w)))) Inkl s(SNu{a}) = s(a). Herav kan vi slutte s(J) Inkl s(a) etter definisjonen av J. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (4) holder. La oss så se på inklusjonen mot venstre. Anta s(J) Inkl s(a). Da har vi om vi setter Q = Mg(b: N;t(b,x,t)) at (Aq)(qêQ.->. N;t(q,x,w)). Ved hjelp av H;0 følger det ved hjelp av dette at N;t(SNu(Q),x,w) og derfor , når man studerer definisjonen av J, at N;t(J,x,w). Men s(J) Inkl s(a). I lys av Teorem 5.1.4 må vi da ha at N;t(a,x,w). Dette viser at (4) holder generelt. (Merk at vi så langt i beviset har benyttet oss av forutsetningen H;0 på en vesentlig måte). Ved hjelp av (4) kan vi nå bevise:

(5) M;t(a,x,w) <-> Sn(s(a),s(J)) ≠ø for alle aêU.

Vi har : Sn(s(a),s(J))=ø <-> s(J) Inkl (I-s(a)) <-> s(J) Inkl s(Neg(a)) <-> N;t(Neg(a),x,w) (Jmf. i denne forbindelse (4)). Det følger at

Sn(s(a),s(J))≠ø <-> ¬N;t(Neg(a),x,w) <-> M;t(a,x,w). I denne forbindelse må man

huske på definisjonen av N;t. Dette viser at (5) holder.

La oss nå betrakte teori-familien C;0 definert ved :

C;0= Mg(k(s;-1({w})): we s(J)).

Vi ønsker da å bevise at (6) Bas(C;0,Q(w,x,t). Dette vil være tilstrekkelig for å bevise satsen fordi vi har , om yêC;0 at y=k(s;-1({w})) for noe wêI og vi har da at s(SNu(y))={w}. Videre har vi fra (1) ovenfor at Bas(C,Q(w,x,t)) og i lys av Teorem 2.1 i §2 kan vi da slutte C=C;0 om (6) holder fordi alle elementene i Q(w,x,t) er lukket under logisk konsekvens.

La oss bevise (6). Vi må da i lys av definisjonen av "Bas" bevise (i)-(v) nedenfor.

(i) (Ax)(xêC;0.->. s(SNu(x)) ≠ø). Dette er uproblematisk fordi det følger umiddelbart fra definisjonen som vi ga ovenfor av mengden C;0.

(ii) C;0 Inkl Rgn(Q(w,x,t)).

Anta aêC;0.Da har vi per definisjon at a=k({s;-1({w})}) for noe we s(J). I lys av (5) ovenfor har vi M;t(s;-1({w}),x,w), og derfor at s;-1({w}) ê C(w,x,t). Det følger at ae Rgn(Q(w,x,t)).

(iii) (Ay)(yêRgn(Q(w,x,t)).->. (Ex)(xêC;0 & s(SNu(x) Inkl s(SNu(y)))).

Er yêRgn(Q(w,x,t)) har vi at y=k({a}) der M;t(a,x,w) for noe a. I lys av (5) følger da at Sn(s(a),s(J))≠ø. Dette innebærer at det finnes noe w' der w'ês(J) & w'ês(a). Da kan vi slutte at {w'} Inkl s(a) og derfor at :

s(SNu(k(s;-1({w'})))) Inkl s(SNu(k({a})))) Inkl s(SNu(y)). Videre har vi k(s;-1({w'})) eC;0. Vi har følgelig om vi setter x;0=k(s;-1({w'})) at x;0êC;0 og at s(SNu(x;0)) Inkl s(SNu(y)). Dette viser at (iii) holder. Vi må også bevise:

(iv) (Ax)(xêC;0.->. ¬((Ey)(yeRgn(Q(w,x,t)) & s(SNu(y)) Inkl s(SNu(x)))).

La oss bevise dette. Anta xêC;0 & yeRgn(Q(w,x,t)). Da har vi at x=k(s;-1({w'})) for noe w'ês(J) og dessuten at y= k({a}) for noe a der M;t(a,x,w). Anta for reduktio ad absurdum at s(SNu(y)) SInkl s(SNu(x)). Siden:

s(SNu(y)) = s(SNu(k({a}))) = s(a)

og s(SNu(x)) = s(SNu(k(s;-1({w'})))) = s;-1({w'}) innebærer dette at

s(a) SInkl s(s;-1({w'})) ={w'}. Men da (+) s(a)=ø. Nå hadde vi M;t(a,x,w) og i lys av (5) har vi da Sn(s(a),s(J))=ø. Men fra dette siste følger s(a)≠ø som åpenbart strider mot (+). Dette viser at (iv) holder.

(v) (Ax)(Ay)(x,yêC;0 & x≠y -> s(SNu(x))Ωs(SNu(y)) =ø. Dette følger umiddelbart fra definisjonen av C;0 ovenfor. Dette avslutter vårt bevis for formel (6). Men dermed har vi også fullført beviset for Teorem 5.3.1. **QED**.

Teoremet ovenfor kan skjerpes betraktelig. Man kan faktisk vise at forbeholdet om at (Aa)(At)(Ax)(Aw)(aêU& N;t(a,x,w).->. wês(a)) er overflødig. Fjerner man dette får man ved en liten reformulering av satsen det følgende teorem:

TEOREM 5.3.2. *Anta H;0 holder. Da har vi*

(AC)(Ah)(Bas(C,Q(w,x,t)) & hêC.->.(Ew')(s(SNu(h))= {w'})).

Bevis: Ved hjelp av Teorem 5.3.4 nedenfor kan man fra H;0 slutte at:

(0) M;t(UN(A),x,w) <–> (Ey)(yêA & M;t(y,x,w)

holder om A er en ikke-tom utsagnsmengde. Anta nå at Bas(C,Q(w,x,t)). Da finnes hêC og derfor aêU slik at (1) h=k({a}) & M;t(a,x,w). Nå har man at s(a) = UN(Mg({w}: wês(a))). I lys av (0) følger derfor fra (1) at det finnes u slik at uêU hvor uêMg(s;-1({w}) : wês(a)) & M;t(u,x,w). Dette innebærer at uêC(w,x,t) og derfor at k({u})êQ(w,x,t). Nå har vi at SNu(k({u})) impliserer SNu(k({a})) siden u impliserer a. Siden C er en basis kan derfor ikke SNu(k({u})) implisere strengt SNu(k({a})). Det følger at s(SNu(k({u}))) = s(SNu(k({a}))) og derfor at :

s(SNu(h)) = s(SNu(k({a}))) = s(SNu(k({u}))) = s(u) = {w} for noe wêI. Dette viser at satsen holder. **QED.**

De bemerkningene som vi fremsatte i forbindelse med Teorem 5.3.1 kan naturlig nok gjentas her. Teoremet viser at hvis man aksepterer H;0 må man akseptere at dersom en person kan velge i en gitt situasjon mellom to eller flere alternativer så kan personen i dette valgøyeblikk kontrollere verdensforløpet i uendelig tid fremover. Dette viser at H;0 mildt sagt er en svært sterk hypotese.

La oss bruke "Q" som forkortelse for den følgende formel:

(Ew)(Ea;1)(Ea;2)(Eb;1)(Eb;2)(Ex)(Ey)(Et)[Alt;w(a;1,x,t) & Alt;w(a;2,x,t) & Alt;w(b;1,y,t) & Alt;w(b;2,y,t) &x≠y & a,1≠a;2 & b;1≠b;2 &(Ew;1)(Re;w;1(a;1,x,t) & Re;w;1(b;1,y,t)) & (Ew;1)(Re;w;1(a;2,x,t) & Re;w;1(b;1,y,t)) &(Ew;1)(Re;w;1(a;1,x,t) & Re;w;1(b;2,y,t)) & (Ew;1)(Re;w;1(a;2,x,t) & Re;w;1(b;2,y,t))]

Denne formelen er ikke så komplisert som den kan gi inntrykk av ved første øyekast. Det den hevder er eksistensen av to personer x og y , et tidspunkt t og fire handlingsalternativer a;1,a;2, b;1 og b;2 som er slik at a;1 og a;2 står åpne for x ved t og b;1 og b;2 står åpne for y ved t. Videre sier setningen angående disse handlingsalternativene at de følgende muligheter foreligger:

(i) x realiserer a;1 og y realiserer b;1
(ii) x realiserer a;2 og y realiserer b;1
(iii) x realiserer a;1 og y realiserer b;2
(iv) x realiserer a;2 og y realiserer b;2

Det skulle være nokså opplagt at Q derfor uttrykker en sann påstand.

Vi kan imidlertid ved hjelp av teoremet ovenfor vise at Q impliserer ¬H;0.Hvis vi har rett angående sannhetsverdien til Q kan vi trekke den slutning at H;0 er usann. Dette er innholdet i den følgende sats:

TEOREM 5.3.3. *H;0. ->.Q*

Bevis : Anta H;0 holder og dessuten at Q holder med det for øye å utlede en motsigelse. Fra Q følger da eksistensen av a;1,x,t,b;1,b;2,w,w;1,w;2 der vi har:

(1) a;1 êA;w(x,t) & b;1,b;2 ê A;w(y,t) & x≠y.
(2) Re;w;1(a;1,x,t) & Re;w;1(b;1,y,t)
(3) Re;w;2(a;1,x,t) & Re;w;2(b;2,y,t)
(4) b;1≠b;2

Fra (4),de to siste konjunktene i (2) og (3), samt Teorem 5.2.1 følger at vi må ha (4.1) w;1≠w;2. Fra den første konjunkten i (1) følger eksistensen av C der (5) Bas(C,Q(w,x,t)) & a;1êC. I lys av Teorem 2.1 i §2 er denne C en-entydig bestemt. Fra de to første konjunktene i (2) og (3) følger ved hjelp av definisjonen av relasjonen Re at (Ay)(yêa;1.->.Br(y,x,w;1)) & (Ay)(yêa;1.->.Br(y,x,w;2)) Fra dette og Teorem 5.1.2 kan vi dedusere Br(SNu(a;1),x,w;1) & Br(SNu(a;2),x,w;2) . Sammen med AT 1 følger da (6) w;1ês(SNu(a;1)) & w;2ês(SNu(a;1)). Siden vi forutsetter at H;0 følger i lys av (5) og Teorem 5.3.2 at (Ew')(s(SNu(a;1))={w'}). Men sammen med (6) impliserer dette w;1=w'=w;2 som tydeligvis strider mot (4.1). Vi har derfor utledet den ønskede motsigelse. **QED**.

Vi har nå,relativt til våre øvrige aksiomer, dedusert en temmelig bisarr konsekvens fra

H;0, viz. ¬Q. Også andre komplett uintuitive konsekvenser kan utledes. Dette gjør det svært nærliggende å trekke den slutning at H;0 er usann.

La oss før vi går videre bemerke at H;0 er ekvivalent med:

DEFINISJON 5.3.2 H;1 = (Aa)(At)(Ax)(Aw)[a Inkl U & wêI.->.
M;t(UNu(a),x,w) <-> (Ey)(yêa & M;t(y,x,w))]

La oss videre bemerke at H;1 impliserer H;2 der

DEFINISJON 5.3.3. H;2=(Aa)(Ab)(At)(Ax)(Aw)[a,bêU & wêI.->.
M;t(D(a,b),x,w) <-> (M;t(a,x,w) v M;t(b,x,w))]

Det følgende teorem representerer en formell oppsummering av disse to punkter:

TEOREM 5.3.4 *(a) H;1 <-> H;0 (b) H;1.->. H;2.*

Bevis : Ad(a). Anta H;0 for å vise H;1. Vi har:

M;t(UNu(a),x,w) <-> M;t(Neg(SN/yêa/(Neg(y))),x,w)
<-> ¬(N;t(SN/yêa/(Neg(y)),x,w)
<-> ¬((Ay)(yêa.->. N;t(Neg(y),x,w))
<-> (Ey)(yêa & ¬N;t(Neg(y),x,w))
<-> (Ey)(yêa & M;t(y,x,w)).

Dette viser H;0 .->. H;1. H;1.->.H;0 bevises på en tilsvarende måte. Vi overlater her til leseren å gi et detaljert bevis.

Ad (b). Anta H;1. Sett a={y;1,y;2}. Da er UNu{y;1,y;2} = D(y;1,y;2). H;2 følger da umiddelbart. **QED**.

Man kan også på andre måter argumentere for at H;0 er usann. Fra Teo-rem 5.3.4 fremgår det at det er tilstrekkelig å vise at H;2 er usann. (Gitt at AT 4 holder.) For å vise at H;2 er usann er det nok å gi et moteksempel til kondi-sjonalen mot høyre. (Kondisjonalen mot venstre holder på grunn av AT 4 og fordi s(a),s(b) Inkl s(D(a,b)).) Vi vil forsøke, noe uformelt, å beskrive et slikt moteksempel.

Vi tenker oss at X og Y er to personer i verdenen w. Y tilbyr X å spille det følgende spill. De skal slå mynt og krone. Blir det mynt skal X få en liten dukke som han kan gi sin datter. Blir det krone skal han få en lekebil som han også kan gi til datteren. De to mulige utfall at X gir sin datter en dukke og at X gir sin datter en lekebil betegnes med henholdsvis a og b. La t være tidspunktet der spillet begynner, og la oss tenke oss at X ikke har noen andre muligheter for å skaffe datteren lekesaker enn å delta i spillet. Det står åpenbart i X´s makt å delta i spillet. Og hva utfallet enn blir vil det enten være slik at han får en dukke eller en lekebil. Det står altså i X´s makt ved tidspunktet t å realisere en situasjon der det er slik at D(a,b). Men det står ikke i X´s makt å påvirke spillets gang. Det står derfor ikke i hans makt å realisere en situasjon der a er tilfelle. Og det står likeledes ikke i hans makt å realisere en situasjon der b er tilfelle.I denne verdenen w er det altså slik at M;t(D(a,b),X,w). På den annen side har vi: ¬M;t(a,X,w) & ¬M;t(b,X,w). Dette gir oss et moteksempel til H;2. Dette mot-eksempel virker klart og i lys av Teorem 5.3.4 er det nærliggende å konkludere med at ¬H;0.

§5.4 Satser som kaster mer lys over forholdet mellom relasjonene Alt og Re og "makt"-

relasjonen M.

I dette avsnittet skal vi bevise ytterligere en del satser som kan kaste et visst lyst over de begrepsdannelsene som har blitt innført i forbindelse med teorien HT. Satsene viser en del av de sammenhenger som foreligger mellom relasjonene Alt, Re, Bef og M.

Er h et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t i verdenen w er h et element i det vi har kalt en basis for Q(x,t,w). Dette innebærer at h er en utsagnsmengde. Som vi tidligere har nevnt sier vi at snittet av utsagnene i h, dvs. SNu(h), gir en fullstendig beskrivelse av handlingsalternativet h. Den følgende setning sier at dersom h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t så finnes det et utsagn som gir en fullstendig beskrivelse av dette alternativ og dette utsagnet beskriver noe som det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t. Intuitivt sett virker dette rimelig.

TEOREM 5.4.1. *Alt;w(h,x,t).->. (Ea)(aêU & Bef(a,h) & M;t(a,x,w))*

Bevis : Anta (1) Alt;w(h,x,t). Da finnes C der Bas(C,Q(w,x,t)) & hêC. Betrakt a;0=d(SNu(h)). Fra (1) og definisjonen av Bef fremgår det at (2) Bef(a;0,h). Videre skulle det være klart at vi har (2.1) a;0 êU. Siden hêC Inkl Rgn(Q(w,x,t)) , (man husker definisjonen av Bas) finnes a;1 slik at h=k({a;1}) og M;t(a;1,x,w).Vi har a;0 = SNu(h) = SNu(k({a;1}) = a;1. Herav følger så (3) M;t(a;0,x,w). Fra (2), (2.1) og (3) følger konsekventen i teoremet. **QED**.

Innholdet i den følgende sats er dette: Anta a er et utsagn som beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w. Da finnes det et handlingsalternativ h som oppfyller de følgende to krav: (i) h står åpent for x ved dette tidspunkt t i verdenen w, og (ii) i alle verdener hvor x realiserer alternativet h fra og med tidspunktet t er det slik at utsagnet a er sant. Også denne satsen virker rimelig.

TEOREM 5.4.2. *M;t(a,x,w).->. (Eh)(Alt;w(h,x,t)*
& (Aw)(Re;w(h,x,t).->.wês(a))

I forbindelse med denne satsen bør det bemerkes at man ikke fra det at M;t(a,x,w) ikke kan slutte at Eh)(Alt;w(h,x,t) &Bef(a,h)& (Aw)(Re;w(h,x,t).->.wês(a)). Dette kommer selvfølgelig av det forhold at hvis et utsagn bekriver noe det står i en persons makt å realisere vil det bare beskrive et handlingsalternativ om det ikke finnes sterkere utsagn som også beskriver noe det står i aktørens makt å realisere.

Bevis : Anta M;t(a,x,w). Fra dette følger ved hjelp av AT 6 at det finnes C der vi har: (1) C≠ø og dessuten (2) Bas(C,Q(w,x,t)). Da finnes h der (3) hêC. Fra (3) og (2) og definisjonen av "Alt;w(h,x,t)" fremgår det at (4) Alt;w(h,x,t). Siden M;t(a,x,w) har vi k({a})êRgn(Q(w,x,t)) . Dette og (2) impliserer i lys av definisjonen av "Bas(C,T)" , klausul (iii), at det finnes h;0 der (5) h;0êC og der:

(6) s(SNu(h;0)) Inkl s(SNu(k({a}))).

Fra (5) og (2) følger (7) Alt;w(h;0,x,t). La w' være et vilkårlig objekt og anta (8) Re;w(h;0,x,t). Da har vi (Ay)(yêh;0.->. Br(y,x,w')). Dette impliserer Br(SNu(h;0),x,w') og derfor i lys av AT 1 at w'ês(SNu(h;0)). Dette og (7) impliserer w'ês(SNu(k({a}))=s(a) som er det vi ønsker. Dette avslutter beviset. **QED**.

Den følgende sats viser at hvis a er et utsagn som beskriver noe det står i x's makt å realisere ved tidspunktet t i verdenen w så finnes det et utsagn b som oppfyller de følgende krav: (i) LK(a,b) dvs. at utsagnet a er en logisk konsekvens av utsagnet b. (ii) M;t(b,x,w) og (iii) det

finnes ikke noe utsagn d som strengt impliserer b og som også beskriver noe det står i x's makt å realisere ved tidspunktet t i verdenen w. Innholdet i satsen kan også uttrykkes på en annen måte: La X være en mengde med utsagn og y et element i X, ie. yêX. Da skal vi si at et utsagn u dekker y med hensyn på X hvis og bare hvis u impliserer y og det ikke finnes noe utsagn zêX som impliserer strengt utsagnet u. Ved hjelp av dette begrep kan Teorem 5.4.3, dvs. teoremet nedenfor, uttrykkes konsist ved å si at for ethvert utsagn u i handlingspotensialet til en person x ved tidspunktet t i verdenen w finnes det et annet utsagn i dette handlingspotensial som dekker u.

TEOREM 5.4.3. *M;t(a,x,w).->. (Eb)(bêU & s(b) Inkl s(a) & M;t(b,x,w) &¬(Ed)(dêU & s(d) SInkl s(b) & M;t(d,x,w)))*

Bevis : Anta (1) M;t(a,x,w). Fra dette og AT 6 følger eksistensen av C der vi har:
(2) C≠ø & Bas(C,Q(w,x,t)). Vi har fra (1) at (3) k({a})êRgn(Q(w,x,t)). Fra (2) og definisjonen av "Bas(C,T)" samt (3) følger eksistensen av a' der
(4) a'êC & s(SNu(a')) Inkl s(SNu(k({a}))). Videre følger da a'êRgn(Q(w,x,t)) og derfor at a'=k({b}) for et eller annet b der (5) M;t(b,x,w). Vi har :
(6) s(b) = s(SNu(k({b}))) = s(SNu(a')) Inkl s(SNu(k({a}))) =s(a) i lys av (4). Videre har vi fra (2), (4) samt definisjonen av "Bas(C,T)" at :
(7) ¬(Ez)(zêRgn(Q(w,x,t)) & s(SNu(z)) SInkl s(SNu(a'))). Anta for reduktio ad absurdum at (8) M;t(d,x,w) & s(d) SInkl s(b) for noe d. Da har vi om vi setter q=k({d}) at (9) qêRgn(Q(w,x,t)). Videre har vi:
s(SNu(q))=s(SNu(k({d})))=s(d) SInkl s(b)= s(SNu(a')). Dette følger ved hjelp av (8) og (6). Men fra dette og (9) kan vi slutte :
(Ez)(zêRgn(Q(w,x,t)) & s(SNu(z)) SInkl s(SNu(a'))) som åpenbart strider mot (7). Vi har derfor ¬(Ed)(M;t(d,x,w) & s(d) SInkl s(b)). Fra dette sammen med (5) og (6) følger konsekventen i satsen. Dette avslutter beviset. **QED**.

Det følgende teorem er i en viss forstand omvendingen til Teorem 5.4.3. Det sier i det vesentlige at hvis et utsagn u i handlingspotensialet til x relativt til tidspunktet t i verdenen w dekker et annet utsagn i dette handlingspotensial finnes det et handlingsalternativ som står åpent for x ved dette tidspunktet t i verdenen w og som beskrives fullstendig av utsagnet u.

TEOREM 5.4.4. *[M;t(b,x,w) & ¬(Ed)(dêU & M;t(d,x,w) & s(d) SInkl s(b))].->.(E!h)(Alt;w(h,x,t) & Bef(b,h))*

Bevis : Fra forutsetningene i satsen og AT 6 følger eksistensen av C der vi har :
(1) C≠ø & Bas(C,Q(w,x,t)). Sett h;0 = k({b}). Fra den første forutsetningen følger h;0ê Rgn(Q(w,x,t)). Anta for reduktio ad absurdum at ¬(h;0êC). Da finnes det a der (1.1) aêC & s(SNu(a)) Inkl s(SNu(h;0)). Men vi må her ha :
(2) s(SNu(a)) SInkl s(SNu(h;0)) for ellers ville vi ha s(SNu(a))= s(SNu(h;0)) og da h;0=aêC som strider mot at ¬(h;0êC). Siden (1.1) følger at det finnes g der gêU og
(3) a=k({g}) & M;t(g,x,w). Men da har vi:
(4) s(g)=s(SNu(k({g}))=s(SNu(a)) SInkl s(SNu(h;0))=s(b). Men (3) og (4) strider mot den andre forutsetningen i teoremet. Vi har derfor (5) h;0êC. Men (5) og (1), samt definisjonen av Alt impliserer: (6) Alt;w(h;0,x,t). Nå har vi videre at
(7) SNu(h;0)=b. Fra (6) og (7) følger da Bef(b,h;0). Vi kan altså trekke den slutning at (8) Alt;w(h;0,x,t) & Bef(b,h;0).
Anta nå (+) Alt;w(h:1,x,t) & Bef(b,h;1) for vilkårlig h;1. Vi ønsker å vise at man da har h;1=h;0. Fra (+) følger etter definisjonen av relasjonen Alt at det finnes C' der (9) Bas(C',Q(w,x,t)) & h;1êC'. Fra (9) og (1) og Teorem 2.1 i §2 følger C=C' og derfor h;1eC .

Fra (+) og definisjonen av relasjonen Bef følger b=SNu(h;1). Men b=SNu(h;0). Derfor Snu(h;1)=SNu(h;0). Men h;0=k({b}) og
h;1êC Inkl Rgn(Q(w,x,t)). Fra dette følger at det finnes g der h;1=k({g}) & M;t(g,x,w). Vi har da : s(SNu(h;0))= s(SNu(k({b})))=s(SNu(k({g})))= s(SNu(h;1)). Fra dette følger imidlertid g=b. Da har vi åpenbart h;0=h;1. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED**.

I beviset rett ovenfor, og også tidligere har vi benyttet oss av den følgende sats som vi strengt tatt ikke har gitt noe bevis for så langt. Det kan derfor være på tide å gi et bevis.

TEOREM 5.4.5. *(a) aêU->. SNu(k({a}))=a.*
(b) T Inkl U->. k(T)= SNu(Mg(X: X Inkl U & T Inkl X &
(AZ)(Z Inkl X & Mng(Z).->.(Ay)(s(SNu(Z)) Inkl s(y).->.yêX))))

Bevis : Ad punkt (a). Anta aêU. Er D Inkl Exp(2,I) har vi per definisjon at
SNu(D)=s;-1[Mg(w:(Ay)(yeD.->.wês(y)))] . Det er derfor tilstrekkelig å bevise : s(SNu(k({a}))=s(a). Vi har:

we s(SNu(k({a})) <-> (Ay)(yêk({a}).->.wês(y))
<-> (Ay)(yêMg(z: s(SNu({a})) Inkl s(z)).->.wês(y))
<-> (Ay)(s(SNu({a})) Inkl s(y).->.wês(y))
<-> (Ay)(s(a) Inkl s(y).->.wês(y))
<-> wês(a)

Dette viser at punkt (a) i teoremet holder.

Ad punkt (b). La oss forkorte det lange uttrykket :
"X Inkl U & T Inkl X & (AZ)(Z Inkl X & Mng(Z).->.
(Ay)(s(SNu(Z)) Inkl s(y).->.yêX))"
med "F(T,X)". Vi vil da først vise at :

(a) k(T) Inkl SNu(Mg(X:F(T,X))).

Som man ser er dette ekvivalent med:

(Az)(s(SNu(T)) Inkl s(z).->. (AX)(F(T,X).->.zêX)). Anta derfor
(1) s(SNu(T)) Inkl s(z) & F(T,X) for vilkårlige z og X. Da har vi (2) T Inkl X og (3) (AZ)(Z Inkl X & Mng(Z).->.(Ay)(s(SNu(Z)) Inkl s(y).->.yêX))
Fra (2) og (3) følger: (Ay)(s(SNu(T)) Inkl s(y).->.yêX). Fra dette og (1) følger så zêX som er det vi ønsker. Dette viser at (a) holder. La oss dernest vise at

(b) SNu(Mg(X:F(T,X))) Inkl k(T).

Dette bevises ved induksjon. Det skulle være klart at vi har T Inkl k(T). Anta nå at (1) Z Inkl k(T) & s(SNu(Z)) Inkl s(y) for vilkårlig y og Z der yêU. Vi ønsker i så fall å bevise at yêk(T). Fra (1) følger Z Inkl Mg(y: s(SNu(T)) Inkl s(y)) i lys av definisjonen av operatoren k. Da har vi:

SNu(Mg(y: s(SNu(T)) Inkl s(y))) Inkl SNu(Z).

Men: SNu(Mg(y: s(SNu(T)) Inkl s(y)))=SNu(T). Derfor har vi at : s(SNu(T)) Inkl s(SNu(Z)). Dette sammen med den andre konjunkten i (1) impliserer at s(SNu(T)) Inkl s(y). Men da har vi etter definisjonen av k at yêk(T), som nettopp er det vi ønsker. Dermed har vi fullført beviset for (b). Fra (a) og (b) følger k(T) =SNu(Mg(X:F(T,X))) som var det vi ville frem til.

Vi har i beviset for (b) benyttet det følgende induksjonsprinsipp:

(+) (Ax)(xêT.->. G(x)) &
(AZ)(Ay)(Z Inkl Mg(y:G(y)) & s(SNu(Z)) Inkl s(y) & yêU.->. G(y)):
->. SNu(Mg(X:F(T,X))) Inkl Mg(y:G(y)).

Det er forsåvidt velkjent hvordan dette bevises. Anta forutsetningene holder og at aêSNu(Mg(X:F(T,X))). Da har vi (AX)(F(T,X).->.aêX). Setter man her inn "Mg(y:G(y))" for for "X" får vi (1) F(T,Mg(y:G(y))).->.G(a). Men antesedenten i (1) følger umiddelbart fra

hypotesene i (+) og definisjonen vi ga ovenfor av F. Da G(a) som er det vi ønsker. Dette avslutter og gjør vårt bevis for Teorem 5.4.5 fullstendig. **QED**.

Etter dette mellomspill som ikke har direkte noe med handlingsalternativer å gjøre går vi videre og beviser flere satser om de grunnleggende relasjoner i teorien HT. Vi skal nå først se på:

TEOREM 5.4.6. *M;t(b;1,x,w) & M;t(b;2,x,w) & Sn(s(b;1),s(b;2))=ø.*
->.Ca(A(w,x,t))>=2

Vi bemerker her at uttrykket "A(w,x,t)" betegner klassen av alle de handlingsalternativer som står åpne for individet x relativt til tidspunktet t og formelt sett er definert ved A(w,x,t)=d[Mg(h: Alt;w(h,x,t))]. Er x en mengde betegner uttrykket "Ca(x)" kardinaltallet til mengden x.

Satsen ovenfor sier at dersom b;1 og b;2 er to logisk sett uforenelige utsagn som begge er med blandt handlingsmulighetene til x ved tidspunktet t i verdenen w, så står minst to handlingsalternativer åpne for x ved dette tidspunkt i verdenen w.

Bevis : Fra den første hypotesen og AT 6 følger eksistensen av C der (1) Bas(C,Q(w,x,t). Vi setter (2) h;1 = k({b;1}) & h;2=k({b;2}) . Vi har da at (3) h;1,h;2ê Rgn(Q(w,x,t)). Dette, (1), og definisjonen av Bas impliserer eksi-stensen av a;1,a;2êC der vi har:

(4) s(SNu(a;1)) Inkl s(SNu(h;1)) & s(SNu(a;2)) Inkl s(SNu(h;2))

Fra den tredje hypotesen følger at (5) Sn(s(SNu(h;1)),s(SNu(h;2)))=ø. Fra (4) og (5) følger så at Sn(s(SNu(a;1)),s(SNu(a;2)))=ø. Men da må a;1≠a;2 for ellers ville vi ha s(SNu(a;1))=ø ,noe som er utelukket i lys av (1), det at a;1,a;2 êC, og klausul (i) i definisjonen av "Bas(C,T)". Fra det vi så langt har utledet følger:

(6) a;1,a;2êC & Bas(C,Q(w,x,t)) & a;1≠a;2. Fra dette og definisjonen av "Alt;w(h,x,t)" følger Alt;w(a;1,x,t) & Alt;w(a;2,x,t) & a;1≠a;2. Men herav Ca(A(w,x,t))>=2. Dette avslutter beviset for Teorem 5.4.6. **QED**.

Det neste teoremet er innholdsmessig nokså nær forbundet med det foregående. Men hypotesen i Teorem 5.4.6 om at b;1 og b;2 har disjunkte sannhetsmengder er nå blitt erstattet med den forutsetning at konjunksjonen av utsagnene b;1 og b;2 ikke beskriver noe forhold x realiserer i verdenen w:

TEOREM 5.4.7. *M;t(b;1,x,w) & M;t(b;2,x,w) &*
¬(Br(K(b;1.b;2),x,w):->.Ca(A(w,x,t))>=2.

Bevis : Anta hypotesene holder og anta for reduktio ad absurdum at (1) ¬(Ca(A(w,x,t))>=2). Da følger Ca(A(w,x,t))<2 dvs. Ca(A(w,x,t)) <=1. Fra den første hypotesen i teoremet og AT 6 følger (3) (EC)(C≠ø & Bas(C,Q(w,x,t)). Fra dette og definisjonen av Alt utleder vi (Eh)(Alt;w(h,x,t)) og herav i lys av definisjonen av "A(w,x,t)" at (4) Ca(A(w,x,t))>0. Fra (4) og (2) følger:
(5) Ca(A(w,x,t))=1. Fra (5), definisjonen av "A(w,x,t)"og definisjonen av Alt følger at det finnes en entydig bestemt C slik at (6) Bas(C,Q(w,x,t)) & Ca(C)=1. Fra den andre konjunkten i (6) følger (7) C={a} for noe a. La oss sette per definisjon
(8) v;1= k({b;1}) & v;2=k({b;2}) . Fra dette, de to første forutsetningene i teoremet, samt definisjonen av "Q(w,x,t)" fremgår det at v;1,v;2êRgn(Q(w,x,t)). Fra dette, den første konjunkten i (6) og definisjonen av Bas har vi at det finnes y;1og y;2 der:
(9) y;1,y;2eC & s(SNu(y;1)) Inkl s(SNu(v;1)) & s(SNu(y;1)) Inkl s(SNu(v;1))

Fra dette og (7) følger y;1=a=y;2 og vi har derfor ,videre i kraft av (9) samt Teorem 5.4.5 at :

(10) s(SNu(a)) Inkl s(SNu(v;1))=s(b;1)

(11) s(SNu(a)) Inkl s(SNu(v;2))=s(b;2)

Fra (6) og AT 7 følger at det finnes h;0 der (12) h;0êC & wês(Br*(SNu(h;0),x)). Fra dette og (7) følger a=h;0 og derfor har vi i lys av den andre konjunkten i (12) at wês(Br*(SNu(a),x)). Herav følger i lys av definisjonen av Br* at :
(13) Br(SNu(a),x,t). Fra (10) og (11) har vi : (14) s(SNu(a)) Inkl s(K(b;1,b;2)). Fra (13) og (14) og Teorem 5.1.3 følger Br(K(b;1,b;2),x,w). Men dette strider mot den tredje forutsetningen i teoremet. Antagelsen av (1) leder derfor til en motsigelse og vi har Ca(A(w,xt))>=2. **QED**.

Man ser at vi i beviset ovenfor har benyttet aksiomene AT 6 og AT 7. Vi har ikke bevist at disse er nødvendige for å kunne oppnå resultatet Teorem 5.4.7, men det virker som om de er vesentlige i beviset for denne sats. Med andre ord synes det ikke mulig å dedusere Teorem 5.4.6 - 5.4.7 i den teorien vi får når vi fjerner AT 6 og AT 7 fra HT. Siden Teorem 5.4.6 og Teorem 5.4.7 virker intuitivt sett svært rimelige rettferdiggjør dette til en viss grad det forhold at vi har tatt med AT 6 og AT 7 i HT.

Den følgende sats sier at hvis b er et utsagn som beskriver noe det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w så finnes det en eller annen logisk mulig verden hvor dette utsagnet b beskriver noe x gjør, mao. er det logisk mulig at utsagnet b beskriver noe x gjør. Dette skulle heller ikke være spesielt oppsiktsvekkende. Det viser imidlertid at teorien akkurat på dette punkt vel er i overensstemmelse med det man skulle forvente.

TEOREM 5.4.8. *M;t(b,x,w).->. (Ew)(wêI & Br(b,x,w)).*

Bevis : Anta (0) M;t(b,x,w). I lys av AT 6 følger eksistensen av C der (1) C≠ø & Bas(C,Q(w,x,t)) . Sett q=k({b}). I lys av (0) og definisjonen av "Q(w,x,t)" følger da at qêRgn(Q(w,x,t)). Fra dette (1) og definisjonen av Bas følger eksistensen av a der (2) aêC og (3) s(SNu(a)) Inkl s(SNu(q)). Fra (1), AT 5 og (2) følger videre at det må eksistere w;0 slik at (3.1) w;0êI & w;0ês(Br*(SNu(a),x)) . Fra dette og definisjonen av Br* kan vi slutte at (4) Br(SNu(a),x,w;0). Herav kan vi videre slutte (5) Br(b,x,w) ved hjelp av (3) og Teorem 5.1.3. Dette, og den første konjunkten i (3.1), impliserer (Ew)(wêI & Br(b,x,w) som er det vi ønsker. **QED**.

Det neste teoremet sier at hvis a er et utsagn som gir en fullstendig beskrivelse av et handlingsalternativ som står åpent for individet x ved tidspunktet t i verdenen w så er det slik at ethvert utsagn som er implisert av a beskriver et forhold som det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w. Også i dette tilfellet virker det rimelig å kreve at vår teori skal ha denne konsekvensen.

TEOREM 5.4.9 *Alt;w(h,x,t) & Bef(a,h). ->. (Ab)(s(a) Inkl s(b).->.M;t(b,x,w))*

Bevis : Fra forutsetningene i satsen og definisjonene av hhv. Alt og Bef følger at det finnes C der (1) Bas(C,Q(w,x,t)) & hêC & a=SNu(h). Siden hêC og vi dessuten har C Inkl Rgn(Q(w,x,t)) har vi at hêRgn(Q(w,x,t)) og derfor at (2) h=k({g}) for g der (3) M;t(g,x,w). Man bør i denne forbindelse konsultere definisjonen av "Q(w,x,t)". Siden a=SNu(h) har vi (4) a=SNu(h)=SNu(k({g}))=g . (Jmf. Teorem 5.4.5) Fra (4) og (3) følger (5) M;t(a,x,w). Anta nå for vilkårlig b at (6) s(a) Inkl s(b). Da har vi fra (5) og (6) i lys av AT 4 at M;t(b,x,w). Vi har følgelig, siden b var vilkårlig, at (Ab)(s(a) Inkl s(b).->.M;t(b,x,w)). Dette

var det vi ønsket å nå frem til. **QED**.

La oss kort oppsummere innholdet i og poenget med denne paragrafen. Gitt de definisjonene som har blitt foreslått tidligere av relasjonene Re, Alt, Bef og M synes det rimelig å kreve at de satsene vi har sett på i denne paragrafen bør kunne utledes i teorien HT. Man kunne oppfatte disse satser som en samling "adekvans"-krav. Slik sett kan det at vi her har tilveiebrakt bevis for dem sies å vise at det er en viss indre konsekvens og sammenheng i den teorien vi har formulert.

§5.5 Satser som kan kaste et visst lys over spørsmålet om hvorvidt en aktørs handlingspotensiale er lukket under negasjons-operasjonen.

I §5.3 så vi at man ikke, – uten at merkelige resultater ble utledbare –, kunne anta at M var en modallogisk mulighets-operator. Det spørsmål vi nå ønsker å stille er om vi generelt har at M;t(Neg(a),x,w) hvis det er tilfelle at M;t(a,x,w). Er det med andre ord slik at dersom a beskriver noe det står i ens makt å realisere ved et bestemt tidspunkt så er det også slik negasjonen av utsagnet a beskriver et forhold det står i ens makt å realisere ved dette tidspunkt? Vår konklusjon her er at dersom teorien HT legges til grunn holder dette under visse forutsetninger, f. eks. dem som inngår i Teorem 5.5.2 nedenfor. I andre tilfelle, slik som angitt i Teorem 5.5.1 holder dette ikke.

Tenker man seg at man legger til som ytterligere et ikke-logisk aksiom i HT den universelle lukning av den følgende setning:

(1) Ctg(a) & M;t(a,x,w). –> M;t(Neg(a),x,w)

der "Ctg(a)" betyr at a er et kontingent utsagn – dvs. et utsagn som er sant i noen mulige verdener og usant i andre – kan man imidlertid vise at dette har svært eiendommelige konsekvenser. En av våre konklusjoner i dette avsnittet er derfor at (1), selvom den kanskje formelt sett er konsistent med HT, neppe kan anses som rimelig.

Vi vil nå gå videre å utlede flere satser som muligens kan kaste ytterligere lys over de begrepsdannelsene vi har innført. I første omgang skal vi studere den følgende sats:

TEOREM 5.5.1. *Bas(C,Q(w,x,t) & a;1.a;2êU & C={k({a;1}),k({a;2})} & Sn(s(a;1),s(a;2))≠ ø.->.*
(Eh)(Eb)(Bef(b,h) & Alt;w(h,x,t) & ¬(M;t(b,x,w) & M;t(Neg(b),x,w)))

Bevis : Fra den første og tredje forutsetningen i teoremet følger ved hjelp av definisjonen av Alt at (1) k({a;1}),k({a;2})êA(w,x,t). Videre har vi i lys av Teorem 5.4.5 at a;1=SNu(k({a;1})). Vi har derfor om vi setter h=d[k({a;1})] at (2) Alt;w(h,x,t) & Bef(a;1,h). I denne forbindelse bør man konsultere definisjonen av Bef. Siden k({a;1})êC Inkl Rgn(Q(w,x,t)) har vi i lys av den første forutsetningen og definisjonen av Bas at det finnes g der (3) k({a;1})=k({g}) og (4) M;t(g,x,w). Da har vi (5) a;1= SNu(k({a;1}))= SNu(k({g}))=g. Fra dette og (4) følger så (6) M;t(a;1,x,w). Anta nå for reduktio ad absurdum at (7) M;t(Neg(a;1).x.w). Da har vi k({Neg(a;1)})êRgn(Q(w,x,t)). Fra dette, definisjonen av Bas og den første og tredje forutsetningen i teoremet følger eksistensen av y slik at

(8) yêC & s(SNu(y)) Inkl SNu(k({Neg(a;1)}))=Neg(a;1). (Jmf. Teorem 5.4.5)

I lys av den tredje forutsetningen har vi (9) y=k({a;1}) v y=k({a;2}). Vi sondrer nå mellom to tilfelle. Tilfelle (i): y=k({a;1}). Fra (8) har vi da :

s(a;1)=s(SNu(k({a;1}))) Inkl s(Neg(a;1))

Men dette innebærer s(a;1)=ø som er umulig i lys av definisjonen av Bas og den første

forutsetningen i teoremet. Dette tilfellet er derfor utelukket.
Tilfelle (ii): Anta y=k({a;2}). Da har vi s(a;2)=s(SNu(k({a;2}))) Inkl s(Neg(a;1)). Man bør her konsultere (8). Men fra dette følger Sn(s(a;2),s(a;1))=ø noe som åpenbart strider mot den fjerde forutsetningen i teoremet. Dette viser at begge tilfellene i (9) er umulige. Herav kan vi trekke den slutning at (7) er usann og derfor at vi må ha ¬M;t(Neg(a;1),x,w). Da har vi ved hjelp av (6) selvfølgelig at

(10) M;t(a,1,x,w) & ¬M;t(Neg(a;1),x,w) .

Men dette impliserer:

(11) ¬(M;t(a;1,x,w) & M;t(Neg(a;1),x,w) .

Fra dette og (2) følger så konsekventen i teorem. Dette avslutter vårt bevis. **QED**.

La oss nå definere setningen B ved:

DEFINISJON 5.5.1 (Ax)(At)(Aw)(AC)(Ah)(Bas(C,Q(w,x,t)) & hêC.->.
(Eh')(h'êC & Sn(s(SNu(h)),s(SNu(h')))=ø)).

Man ser umiddelbart at B er uforenlig med antesedenten i Teorem 5.5.1. Det er mulig at B kan betraktes som et rimelig aksiom som bør settes opp på listen over aksiomer. Her vil vi imidlertid bare bruke B som en premiss som vi vil føye til i våre teoremer. Vi skal først gi bevis for den følgende setning i forbindelse med denne setningen B:

TEOREM 5.5.2. *B.->. [Bef(a,h) & Alt;w(h,xt).->.*
(M;t(a,x,w) & M;t(Neg(a),x,w))]

Bevis : Anta (1) B & Bef(a,h) & Alt;w(h,xt). Vi ønsker å bevise at konsekventen i teoremet holder. Fra den siste konjunkten i (1) følger eksistensen av C der:
(2) hêC & Bas(C,Q(w,xt)). Fra (1) og (2) samt definisjonen av Bef følger a=SNu(h). Siden hêC har vi fra den andre konjunkten i (2) og definisjonen av Bas at
hêRgn(Q(w,x,t) og derfor at det finnes a' der (3.0) h=k({a'}) & M;t(a',x,t). Men fra dette, det at a= SNu(h) og a'=SNu(k({a'})) følger at a=a'. Vi har derfor
(3) h=k({a}) & M;t(a,x,w) . Fra (2) og definisjonen av B følger eksistensen av h' der: (4) h'êC & Sn(s(SNu(h')),s(SNu(h)))=ø. Nå har vi s(a)=s(SNu(k({a})))= s(SNu(h)). Fra dette og (4) utleder vi (5) s(SNu(h')) Inkl s(Neg(a)) . Men da må vi ha (6) s(SNu(h')) Inkl s(SNu(k({Neg(a)}))). Siden h'êC kan vi slutte at h'êRgn(Q(w,x,t)) og derfor at (7) h'=k({b}) for noe b der
(8) M;t(b,x,w). Det følger at:

s(b)=s(SNu(k({b})))=s(SNu(h')) Inkl s(SNu(k({Neg(a)}))) =s(Neg(a)).

I denne forbindelse bør man huske på at Teorem 5.4.5 holder. Vi har følgelig:
(9) s(b) Inkl s(Neg(a)). Fra dette, (8) og aksiom AT 4 følger M;t(Neg(a),x,w). Dette og (3) impliserer så det vi ønsker. **QED**.

TEOREM 5.5.3. *Anta (i) Bef(a,h) & Alt;w(h,x,t) Anta videre at:*
(ii) s(a) Inkl s(g)
(iii) (Eh')(Eb)(Bef(b,h') & Alt;w(h',x,w) & Sn(s(g),s(b))=ø)
Da gjelder den følgende påstand: M;t(g,x,w) & M;t(Neg(g),x,w).

Dette teoremet kan sammenlignes med Teorem 5.5.2.

Bevis : Anta at forutsetningene i teoremet holder. Da har vi for noe h'
(1) Bef(a,h) & Alt;w(h,x,t) & s(a) Inkl s(g) &
Bef(b,h') & Alt;w(h',x,w) & Sn(s(g),s(b))=ø

Vi ønsker å vise at (+) M;t(g,x,w) & M;t(Neg(g),x,w). Siden Alt;w(h,x,t) & Alt;w(h',x,t) har vi ved hjelp av definisjonen av Alt og Teorem 2.1 i §2 at :

(2) Bas(C,Q(w,x,t)) & h,h'êC.

Siden Bef(a,h) & Bef(b,h') har vi:

(3) a=SNu(h) & b=SNu(h') . Fra (2) følger h,h'êRgn(Q(w,x,t)) og herav at det finnes b' og b" slik at :

(4) h=k({b'}) & M;t(b',x,w) & h'=k({b"}) & M;t(b",x,w).

Fra (3),(4) og Teorem 5.4.5 følger a=b' og b=b". Vi har derfor (6) M;t(a,x,w) & M;t(b,x,w). Fra (6) og den tredje konjunkten i (1) følger (7) M;t(g,x,w) i lys av aksiomet AT 4. Fra den siste konjunkten i (1) følger s(b) Inkl s(Neg(g)) . Fra dette, (6) og AT 4 følger M;t(Neg(g),x,t). Vi har derfor M;t(g,x,w) & M;t(Neg(g),x,w), dvs. (+) ovenfor. Dette avslutter beviset. **QED**.

Anta a er et utsagn, ie. aêU. Vi sier da at a er et kontingent utsagn hvis og bare hvis hverken utsagnet a eller negasjonen av a er nødvendig sanne utsagn. Vi bruker "Ctg(a)" som forkortelse for uttrykket "a er et kontingent utsagn" og gir den følgende definisjon:

DEFINISJON 5.5.2. Ctg(a) <-> [(Ew)(wêI & wês(a)) & (Ew)(wêI & wês(Neg(a))].

Vi vil nå undersøke en bestemt formel H;3. Formelen er definert ved:

DEFINISJON 5.5.3. H;3= (Aa)(At)(Ax)(Aw)(Ctg(a) &
M;t(a,x,w).->.M;t(Neg(a),x,w))

Ved første øyekast kan denne formelen virke tilforlatelig, men setningen har likevel nokså eiendommelige konsekvenser i nærvær av våre andre aksiomer noe bla. det følgende teorem viser:

TEOREM 5.5.4. *H;3.->. (AC)((Bas(C,Q(w,x,t)) & C≠ø) ->.*
(C=Mg(k({s;-1({w})}): wêI) v (Ah)(hêC.->. s(SNu(h))=I)

Beviset som vi kan tilby for denne sats er temmelig langt. Leseren må derfor ha en viss tålmodighet ved gjennomlesningen av det.

Bevis: Anta (1) H;3 & Bas(C,Q(w,x,t)) & C≠ø & (Eh)(hêC & s(SNu(h))≠I). Vi ønsker da å bevise at C=Mg(k({s;-1({w})}):weI). Dette vil også være tilstrekkelig for å ha bevist satsen. Fra den siste konjunkten i (1) følger for noe h at:
(2) hêC & s(SNu(h))≠I. Siden hêC har vi fra dette og definisjonen av Bas at
(3) s(SNu(h))≠ø. Siden C Inkl Rgn(Q(w,x,t)) følger ved hjelp av (2) og definisjonen av"Q(w,x,t)" at det finnes a der (4) h=k({a}) & M;t(a,x,w). Fra (4) og Teorem 5.4.5 har vi (5) SNu(h)=a. Fra (2),(3) og (5) følger (6) s(a)≠I & s(a)≠ø. Dette og definisjonen av "Ctg(a)" impliserer (7) Ctg(a) & Ctg(Neg(a)). Vi vil nå bevise:

(+) (Aw')(w'êI.->. M;t(s-1({w}),x,w)).

Anta derfor for vilkårlig w' at (8) w'êI. Vi sondrer mellom to tilfelle:
Tilfelle (i): w'ês(a). Fra (4),(7) og H;3 følger da at (9) M;t(Neg(a),x,w). Siden w'ês(a) har vi ¬(w'ê(s(a)-{w'}) & (s(a)-{w'}) Inkl s(Neg(a))U s(a)-{w'}). Vi har :
(10) s(Neg(a)) Inkl s(Neg(a))U s(a)-{w'}) og derfor i lys av (9) og AT 4 at
(11) M;t(D(Neg(a),s;-1(s(a)-{w'})),x,w). Sett q=d[D(Neg(a),s;-1(s(a)-{w'}))]. Siden wês(Neg(a)) for noe w (Jmf. (7)) har vi (12) Ctg (q). Men man ser umiddelbart at (13) s(Neg(q))={w'}. Fra (11),(12),(13) og H;3 følger (14) M;t(s;-({w'}),x,w). Påstanden (+) holder derfor i dette tilfellet. Tilfelle (ii): w'ê(I-s(a)). Da har vi w'es(Neg(a)). Sett r=d[D(a,

s;-1(s(Neg(a))-{w'}))]. Da har vi w'ês(r) og siden wês(a) for noe w at wês(r) for noe w. Det følger fra dette at (15) Ctg(r). Nå har vi at s(a) Inkl s(r) i lys av definisjonen av r. Fra dette og (4),samt AT 4, følger at
(16) M;t(r,x,w). Fra (15), (16) og H;3 følger da (17) M;t(Neg(r),x,w). Men s(Neg(r))={w'}. Dette ser man igjen på grunnlag av definisjonen av r. Det følger at vi må ha:
M;t(s;-1({w'}),x,w). Disse overveielsene viser at (+) også holder i dette tilfellet. Vi konkluderer med at (+) holder.

Vi må nå bevise: (++) C=Mg(k({s;-1({w})}) : wêI).
(a) Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre og gir bevis for den. Anta hêC. Da har vi h= k({b}) der M;t(b,x,w) for noe b. Vi har siden Bas(C,Q(w,x,t)) at s(SNu(h))=s(b)≠ø. Da finnes det w;0ês(b). Men da M;t(s;-1({w;0}),x,w) i lys av (+) ovenfor. Vi har {w;0} Inkl s(b) og derfor at s(SNu(k({s;-1{w;0}})) Inkl s(SNu(b)). Men siden hêC og Bas(C,Q(w,x,t)) følger at h=k({s;-1{w;0}}) i lys av klausul (iv) i definisjonen av Bas. Det følger at hêMg(k({s;-1({w})}) : weI). Dette viser at inklusjonen mot høyre holder. (b) Vi tar dernest for oss inklusjonen mot venstre for å vise at denne holder. Anta derfor for vilkårlig h at he Mg(k({s;-1({w})}) : weI). Da finnes det w;0êI slik at h=k({s;-1({w;0})}). Vi må vise at hêC. På dette punkt ser vi ingen annen måte å gjøre dette på enn å vise at

(+++) Bas(C;1,Rgn(Q(w,x,t)) der C;1= Mg(k({s;-1({w})}) : wêI)

Ved hjelp av Teorem 2.1 i §2 konkluderer vi da med at C;1=C og følgelig at hêC. Et bevis for (+++) er derfor tilstrekkelig for å bevise (++) og derfor tilstrekkelig for å bevise teoremet.

Vi skal derfor vise at (+++) holder, mao. at C;1 oppfyller kravene (o)-(v) i definisjonen av "Bas(C,T)". Vi har åpenbart at C;1êPt(Pt(U)). Kravet (o) er derfor oppfylt.
(a) Det skulle også være klart at (Ah)(hêC;1 .->. s(SNu(h))≠ø) . Dette innebærer at også kravet (i) er oppfylt. (b). Anta hêC;1. Fra definisjonen av C;1 følger da at h=k({s;-1({w})}) for noe wêI. Fra dette og (+) følger M;t(s;-1({w}),x,w). Det følger at vi har hêRgn(Q(w,x,t)). Fra dette følger C;1 Inkl Rgn(Q(w,x,t)). Dette viser at kravet (ii) i definisjonen av Bas også er oppfylt. (c) Vi må dernest vise at:

(Ay)(yêRgn(Q(w,x,t).->.(Ex)(xêC;1 & s(SNu(x)) Inkl s(SNu(y)))).

Anta derfor at yêRgn(Q(w,x,t)). Da finnes det a der vi har y=k({a}) & M;t(a,x,w). Siden C er en basis for Q(w,x,t) finnes h der hêC og hvor

s(SNu(h)) Inkl s(SNu(y))=s(a).

Men siden C er en basis har vi s(SNu(h))≠ø. Da følger s(a) ≠ø. Det følger at det finnes w;0 der w;0ês(a). Vi må da kunne slutte at :

s(SNu(k({s;-1({w;0})}))))={w;0} Inkl s(a)=s(SNu(y))

Sett h;1 =d[k({s;-1({w;0})})]. Da ser man at vi skulle ha gitt bevis for:

(Ay)(yêRgn(Q(w,x,t)).->.(Eh;1)(h,1êC;1 & s(SNu(h;1)) Inkl s(SNu(y)))).

(d) Det gjenstår å gi et bevis for:

(Ax)(xêC;1.->.¬(Ey)(yêRgn(Q(w,x,t) & s(SNu(y)) SInkl s(SNu(x)))).

Anta xeC;1 og samtidig at (*) yêRgn(Q(w,x,t)) & s(SNu(y)) SInkl s(SNu(x)) for noe y. Vi ønsker å vise at dette leder til en motsigelse. Siden xêC;1 har vi x=k({s;-1({w}}) for noe wêI. Siden yêRgn(Q(w,x,t)) har vi y=k({a}) der M;t(a,x,w) for noe a. Siden Bas(C,Q(w,xt)) følger det at vi må ha at det finnes en h der:

hêC & s(SNu(h))≠ø & s(SNu(h)) Inkl s(SNu(y))= s(a). Det følger fra dette at det må finnes w' slik at w'ês(a) , dvs, som er slik at {w'} Inkl s(a). Ved hjelp av (*) kan vi da slutte :

{w'} Inkl s(a)=s(SNu(y)) SInkl s(SNu(x)) ={w}. Men da har vi {w'} Inkl {w} som er umulig. For er w'=w kan ikke {w'} være strengt inkludert i {w}, og dette kan heller ikke være tilfelle om w≠w'. Antagelsene ovenfor leder derfor til en motsigelse som nettopp var det vi ønsket. (e) Tilslutt gjenstår det å vise at C;1 oppfyller kravet (v) i definisjonen av basis. Dette ser man imidlertid lett at må være tilfelle i lys av konstruksjonen av C;1. Dette avslutter vårt bevis for

teorem 5.5.4. **QED**.

Man kan også notere det følgende i forbindelse med uttrykket "Bas(C,Q(w,x,t)) & (Eh)(heC & s(SNu(h))≠I)". Vi har:

TEOREM 5.5.5. *Bas(C,Q(w,x,t)) & (Ah)(hêC.->.s(SNu(h))=I).->. Ca(C)=1*

La oss gi et bevis for dette:
Bevis : Anta (1) Bas(C,Q(w,x,t)) & (Ah)(hêC.->.s(SNu(h))=I). Anta dessuten for reduktio ad absurdum at (2) h;1,h;2êC & h;1≠h;2. Vi har da i lys av (1) at h;1,h;2êRgn(Q(w,x,t)) og derfor at det finnes a;1 og a;2 slik at h;1=k({a;1}) og h;2=k({a;2}) og hvor vi videre har at M;t(a;1,x,w) & M;t(a;2,x,w). I lys av Teorem 5.4.5 har vi a;1= SNu(k({a;1})=SNu(h;1) & a;2= SNu(k({a;2})=SNu(h;2). Fra den siste konjunkten i (1) følger da at s(a;1)=I=s(a;2). Fra dette følger imidlertid a;1=a;2 og derfor at h;1=h;2, noe som strider mot (2). Siden C≠ø følger at Ca(c)=1. Dette avslutter beviset. **QED**.

Fra Teorem 5.5.4 og Teorem 5.5.5. følger:

TEOREM 5.5.6. *(a) (Bas(C,Q(w,x,t)) & Ca(C)>=2).->.*
Bas(C,Q(w,x,t)) & (Eh)(hêC& s(Snu(h))≠I)
(b) H;3.->.(AC)(Bas(C,Q(w,x,t) & Ca(C)>=2.->.
C= Mg(k({s;-1({w})}): wêI)

Bevis : Satsen følger meget lett ved hjelp av Teorem 5.5.4 - 5.5.5. **QED**.

Studerer man nøyere beviset for Teorem 5.3.3 skulle det fremgå at vi i dette bevis i realiteten også beviser:

TEOREM 5.5.7. *Q.->.¬[(Bas(C,Q(w,x,t)) & Ca(C)>=2).->. C=Mg(k({s;-1({w})}): wêI)]*

Bevis : Det er egentlig lett å vise dette hvis man gransker beviset for Teorem 5.3.3 nøyaktig. Vi overlater derfor dette som en øvelse for leseren. **QED**.
Det følgende er et korollar til Teorem 5.5.5 og Teorem 5.5.6:

TEOREM 5.5.8. *H;3.->.¬Q*

Bevis : Dette overlates til leseren. **QED**.
Ved omtalen av Q fant vi at denne formelen uttrykte en sann påstand. I lys av Teorem 5.5.8 kan vi da konkludere med at H;3 er usann. Merk at vi ikke har gitt noe formelt bevis for at H;3 er usann. Dette kan ikke gjøres på basis av aksiomene AT 1-AT 7 siden H;3 faktisk er konsistent med dem.

§6 Prawitz og Bergstrøm om handlingsalternativer.

I

Vi har ovenfor fremlagt en teori om handlingsalternativer. I et arbeide om utilitarisme, se Bergstrøm [1], har Lars Bergstrøm vært interessert i formulere den utilitaristiske tese mer presist og derved forsøkt å presisere to begreper som er vesentlige for en forståelse av denne tese, nemlig begrepene "handlingsalternativ" og "konsekvens til en

handling". I en rekke artikler, se Prawitz [1], [2] og [3], har Prawitz diskutert sider ved Bergstrøms arbeide og da særlig aspekter ved de eksplikasjoner av handlingsalternativ-begrepet som Bergstrøm undersøker i sin avhandling. Siden spesielt begrepet handlingsalternativ har interesse fra vår synsvinkel synes det derfor nærliggende å studere nærmere endel av det disse to forfattere har å si om dette tema og sammenligne dette med det som følger fra den teorien som har blitt presentert ovenfor.

Vi skal nå formulere den utilitaristiske tese som diskuteres av Prawitz og Bergstrøm. Språket til HT inneholder imidlertid ikke alle de språkelige ressurser som er nødvendige for å kunne uttrykke denne tesen. Av denne grunn utvider vi dette språk med de følgende predikatkonstruksjoner:

(1) "h er en handling som bør utføres i verdenen w". Denne forkorter vi med "Bør;w(h)"
(2) "Konsekvensene til handlingen h;1 er bedre enn konsekvensene til handlingen h;2 i verdenen w". Denne konstruksjonen forkorter vi med "BeK;w(h;1,h;2)"
(3) "Handlingen h;1 er et handlingsalternativ til handlingen h;2 i verdenen w". Vi benytter " ALT;w(h;1,h;2)" som forkortelse i denne forbindelse.

Det bør bemerkes at ALT ikke bør forveksles med relasjonen Alt som vi innførte i forbindelse med HT. Man ser at ALT er en tre-plass relasjon, mens derimot Alt er en fire-plass relasjon. Det er også naturlig å nevne at relasjonen BeK forutsettes å være en transitiv og irrefleksiv relasjon. Lukningen av de følgende setninger gjelder derfor for denne:

BE1 BeK;w(h;1,h;2) -> wêI
BE2 BeK;w(h;1,h;2) & BeK;w(h;2,h;3).-> BeK;w(h;1,h;3)
BE3 wêI -> ¬BeK;w(h;1,h;1)

Det følger fra disse setningene at BeK er en asymmetrisk relasjon.

I Prawitz [2], [3] betraktes nå den følgende utilitaristiske tese som vi formulerer ved hjelp av den notasjon som vi har innført ovenfor:

(T) Bør;w(h) <-> (Ah;1)(ALT;w(h;1,h) -> BeK;w(h,h;1))

Det skulle ikke være så vanskelig å se at (T) uttrykker det velkjente utilitaristiske standpunkt at en handling bør utføres hvis og bare hvis dens konsekvenser er bedre enn dem til ethvert alternativ.

I denne tese inngår, som man ser, predikatet ALT. Spørsmålet blir derfor hvordan dette skal defineres. I Prawitz [2], [3] betraktes den følgende definisjon:

DEFINISJON 6.1: En handling h;1 sies å være et alternativ til handlingen h;2 hvis og bare hvis h;1 og h;2 oppfyller de følgende tre krav: (i) h;1 og h;2 er tidsidentiske, (ii) h;1 og h;2 er aktøridentiske, (iii) h;1 og h;2 er begge utførbare og (iv) h;1 og h;2 er inkompatible.

Det kan være av interesse å formalisere denne definisjonen innenfor den rammen vi har satt opp, eventuelt utvidet med ytterligere uttrykksmidler. I første omgang skal vi gjøre dette. Dette gjøres under de følgende punkter (a) -(d).

(a) Vi har tidligere definert hva vi mener med en logisk mulig handling . Definisjonen var

denne:

MHand(h) <-> (Ea)(Ex')(Ew)[x'=<a,x> & Br(a,x,w)]

En mulig handlig er altså et par <a,x> der a er et utsagn som beskriver et forhold individet x realiserer i en eller annen mulig verden. Er a=<x,y> et par bruker vi "p(a,1)" for å betegne den første komponenten i a, "p(a,2)" for å betegne den andre komponenten i a.

Er da h;1 og h;2 to handlinger er det nærliggende å si at de er aktøridentiske hvis og bare hvis p(h;1,2) = p(h;2,2).

(b) Det skulle også være nokså lett å eksplisere inkompatibilitet om vi holder oss til denne definisjonen av mulig handling. Vi sier at h;1 og h;2 er inkompatible hvis og bare hvis utsagnskomponentene i handlingene er logisk uforenelige, dvs. hvis og hvis s(p(h;1,1))Ωs(p(h;2,2)) =ø.

(c) Er det mulig å definere utførbarhet innenfor den rammen vi nå har satt opp? Dette synes ikke umulig om vi trekker inn "makt"-predikatet M. Et nærliggende forslag synes da å være dette; nemlig å si at h er utførbar i verdenen w hvis og bare hvis det finnes et tidspunkt t slik at M;t(p(h,1),p(h,2),w), mao. hvis og bare hvis utsagnskomponenten i h beskriver et forhold som det står i "aktørkomponentens" makt å realisere relativt til et eller annet tidspunkt i verdenen w.

(d) Når det gjelder tidsidentitet mellom to handlinger innebærer dette at handlingene strekker seg over det samme tidsrom. Dette kan vi ikke direkte definere ved hjelp av predikatene i HT. Selvfølgelig viser ikke dette at HT er gal, bare at språket til HT ikke er tilstrekkelig uttrykkskraftig for det foreliggende formål. Vi innfører derfor de følgende to konstruksjoner:

(4) "t er et begynnelselsestidspunkt for handlingen h". Forkortelsen "Beg(t,h)" benyttes i denne forbindelse.
(5) "t er et avslutningstidspunkt for handlingen h". Vi vil for denne konstruksjon benytte forkortelsen "Avsl(t,h)"

De neste to setningene virker da svært innlysende og vil bli forutsatt i det følgende. Den første sier at hvis en handling har et begynnelsestidspunkt har den et og bare et slikt tidspunkt. Den andre sier akkurat det samme om avslutningstidspunkter til en handling.

BEG 1: (Et)(Beg(t,h) & MHand(h)).->. (E!t)(Beg(t,h))
AVSL 1: (Et)(Avsl(t,h) & MHand(h)).->. (E!t)(Avsl(t,h))

I det utvidete språk kan vi nå definere tidsidentitet mellom to handlinger h;1 og h;2 ved å si at begge handlingene skal ha såvel et begynnelsestidspunkt som et avslutningstidspunkt, at begynnelsestidspunktene til de to handlingene skal være identiske og at avslutningstidspunktene til dem skal være identiske. Disse momentene er tatt vare på i den følgende definisjon:

TId(h;1,h;2) <-> (E!t)(Beg(t,h;1))&(E!t)(Beg(t,h;2))&(E!t)(Avsl(t,h;1))&
(E!t)(Avsl(t,h;2)) &(it)(Beg(t,h;1))=(it)(Beg(t,h;2))
&(it)(Avsl(t,h;1))=(it)(Avsl(t,h;2))

Hvis vi bruker de foreslåtte eksplikasjoner av definiensuttrykkene i Definisjon 1 som nå er fremlagt under punkt (a) - (d) kan denne reformuleres på en mer formalisert måte slik:

(D1) ALT;w(h;1,h;2) <->[MHand(h;1) &MHand(h;2)
& TId(h;1,h;2) &p(h;1,2) = p(h;2,2)&
(Et)M;t(p(h;1,1),p(h;1,2),w)&(Et)M;t(p(h;2,1),p(h;2,2),w)&
s(p(h;1,1))Ωs(p(h;2,1)) =ø]

Lukningen av setningen (T) og (D1) er to generelle teoretiske prinsipper innenfor den språkrammen vi nå har fastlagt. Imidlertid er det et prinsipp til som vi vil betrakte og som tilsynelatende virker plausibelt. La oss gjøre rede for dette.

Det synes rimelig å si at en mulig handling h;1 impliserer en annen mulig handling h;2 om utsagnskomponenten i den første handlingen logisk sett impliserer utsagnskomponenten i den andre handlingen, og handlingene dessuten er aktøridentiske; mao. hvis og bare hvis vi har:

s(p(h;1,1)) Inkl s(p(h;2,1)) & p(h;1,2)=p(h;2,2)

I tillegg til det utilitaristiske prinsippet T for predikatet Bør, virker det rimelig - i alle fall ved første øyekast - å tenke seg at dersom en handling h bør utføres så bør også enhver handling som er implisert av h utføres. Dette prinsipp kan formuleres slik:

(G) [Bør;w(h;1) & (Ai)(iê{1,2} -> MHand(h;i)) &
s(p(h;1,1) Inkl s(p(h;2,1) & p(h;1,2)=p(h;2,2)] -> Bør;w(h;2)

På dette punkt kan det være passende å oppsummere. Vi har presentert tre prinsipper som alle tilsynlatende virker tilforlatelige. For det første dreier det seg om det utilitaristiske prinsippet T. For det andre dreier det seg om definisjon D1 av predikatet "Handlingen h;1 er et handlingsalternativ til handlingen h;2 i verdenen w". Endelig har vi prinsippet (G) ovenfor, som uttrykker at dersom en handling bør utføres så bør også enhver aktøridentisk handling som er implisert av den utføres. Saken er nå den at disse tre prinsippene ikke er så uproblematiske som de ved første øyekast kan fortone seg. Det følgende eksempel, som er hentet fra Bergstrøm, og hvor vi følger fremstillingen til Prawitz, viser at dette.

La a være handlingen å studere filosofi. La videre b være handlingen å studere i Uppsala og c handlingen å studere filosofi i Oxford. "aΩb" betegner da handlingen å studere filosofi i Uppsala, "aΩc" betegner handlingen å studere filosofi i Oxford. Uttrykket "¬a" betegner handlingen som består i å la være å studere filosofi. La oss nå tenke oss at aktøren er Karl og at konsekvensene vil være svært gode om Karl studerer filosofi i Uppsala, mens de vil være svært dårlige om han studerer filosofi i Oxford. Av denne grunn er det mulig at det å studere filosofi, a, som vil ha både de konsekvenser som er felles for det å studere filosofi i Uppsala og det å studere filosofi i Oxford, har færre og dårligere konsekvenser enn det å studere filosofi i Uppsala. Kanskje det å la være å studere filosofi ville være bedre. Vi kan altså tenke oss at de nevnte handlinger er ordnet således med hensyn på godheten til de totale konsekvenser: aΩb, ¬a, a, aΩc. Hvis man nå legger det utilitaristiske prinsipp (T) til grunn, følger at aΩb bør utføres. Denne handlingen har jo ifølge forutsetningene bedre konsekvenser enn alle sine alternativer. På den annen side ser man at ¬a er et alternativ til a, fordi handlingen er utførbar, inkompatibel, aktøridentisk og tidsidentisk med a. Men ¬a har bedre konsekvenser enn a. Forutsetter man derfor at prinsippet (T) holder følger at det ikke er slik at a bør utføres. Fra dette kan man derfor trekke den slutning at handlingen aΩb bør utføres, mens det ikke er slik at handlingen a bør utføres. Dette strider åpenbart mot prinsippet G.

Vi skal nå formulere og bevise et teorem som kan oppfattes som en formalisering av argumentet ovenfor.

Teoremet har en rekke åpne setninger som premisser. Det er nødvendig å spesifisere disse setningene nærmere før vi formulerer selve satsen.

Den første åpne setningen er:

(Pr 1) h;1 = <a,x> &h;2 = <Neg(c),x> & h;3 = <c,x>
& h;4 = <b,x> &(Ai)(iê{1,...,4} -> MHand(h;i))

(Pr1) uttrykker, som man iaktar, at h;1 - h;4 er mulige handlinger og spesifiserer utsagnskomponentene i disse handlingene. Vi bemerker at om man holder seg til den definisjonen vi tidligere har gitt av en mulig handling, ser man at Pr 1 impliserer at a, b og c er utsagn. Endelig legger man merke til at (Pr 1) impliserer at alle handlingene er aktøridentiske.

Den andre åpne setningen er:

(Pr 2) s(a) SInkl s(c) & s(b) SInkl s(c) & s(a)Ωs(b)=ø.

I lys av (Pr 1) uttrykker (Pr 2) at utsagnskomponenten i h;1 impliserer utsagnskomponenten i h;3. Videre uttrykker (Pr 2) at utsagnskomponenten i h;4 impliserer utsagnskomponenten i h;3. Endelig impliserer den siste konjunkten i (Pr 2) at handlingene h;1 og h;4 er inkompatible.

Den neste åpne setningen uttrykker at alle disse fire handlingene h;1 - h;4 er utførbare i w og tidsidentiske i den betydning som vi har gjort rede for ovenfor. Vi formulerer den på følgende måte:

(Pr 3) (Ai)(i,jê{1,...,4} & i≠j->. TId(h;i,h;j)) &
(Ai)(iê{1,...,4} -> (Et)(têT & M;t(p(h;i,1),p(h;i,2),w))

Som man iaktar sier den første konjunkten at alle disse fire handlingene er innbyrdes tidsidentiske. Den andre konjunkten at de alle er utførbare i w.

Den fjerde åpne setningen vi betrakter uttrykker at konsekvensene til h;1 i verdenen w er bedre enn den til alle alternativer. ie:

(Pr 4) (Ah)(ALT;w(h,h;1) -> BeK;w(h,h;1)

Endelig angir den femte åpne setningen den følgende prioritering mellom handlingene h;1 - h;4:

(Pr 5) BeK;w(h;1,h;2) & BeK;w(h;2,h;3) & BeK;w(h;3,h;4)

For å kunne se sammenhengen mellom disse forutsetningene Pr 1 - Pr 5, og handlingene i det eksemplet som vi gjorde rede for ovenfor, kan man tenke seg at h;1 representerer handlingen å studere filosofi i Uppsala, videre at h;2 representerer handlingen å ikke studere filosofi. Handlingen h;3 er handlingen å studere filosofi. Endelig representerer h;4 handlingen å studere filosofi i Oxford.

Vi skulle nå være i stand til å formulere vårt teorem eksplisitt. La oss betegne konjunksjonen av de åpne setningene (Pr 1) - (Pr 5) med "Prem 1". Teoremet vi er interessert i kan da formuleres slik:

TEOREM 6.1: *Anta Prem 1 holder. Anta videre at lukningen av T og D1 holder. Da gjelder det at Bør;w(h;1) & ¬ Bør;w(h;3) & s(p(h;1,1)) Inkl s(p(h;3,1)). Dette innebærer i sin tur at prinsippet (G) ikke holder.*

Bevis: Beviset for denne sats er i det vesentlige av en temmelig triviell natur. Fra Pr 4 og T følger direkte at Bør;w(h;1). Fra Pr 1 følger at h;3 er aktøridentisk og uforenelig med h;2. At h;3 og h;2 er inkompatible følger direkte fra det at
h;2 = <Neg(c),x> & h;3 = <c,x> og Neg(c) åpenbart er uforenelig c. Fra Pr 3 følger imidlertid også at disse to handlingene er tidsidentiske og utførbare. Dette innebærer at vi må ha (1) ALT;w(h;2,h;3) i lys av D1. På den annen side følger direkte fra Pr 5 at (2) BeK;w(h;2,h;3). Anta nå mot formodning at (+) Bør;w(h;3). Fra dette og (T) følger:

Bør;w(h;3) <-> (Ah;1)(ALT;w(h;1,h;3) -> BeK;w(h;3,h;1))

Dette og (+) gir oss selvfølgelig ALT;w(h;2,h;3) -> BeK;w(h;3,h;2), som sammen med (1)

impliserer (3) BeK;w(h;3,h;2). Men siden Bek;w åpenbart er en transitiv og irrefleksiv relasjon følger at den er asymmetrisk. Men dette og (2) ovenfor gir oss helt åpenbart en motsigelse. Det følger at ¬Bør;w(h;3). Fra Pr 1 og Pr 2 følger:
h;1=<a,x> & h;3= <c,x> & s(a) Inkl s(c). Siden p(h;1,1)=a &p(h;3,1)=c følger da s(p(h;1,1)) Inkl s(p(h;3,1)). Vi har nå vist det vi ønsker, nemlig:

Bør;w(h;1) & ¬ Bør;w(h;3) & s(p(h;1,1)) Inkl s(p(h;3,1))

Men siden det følger fra Pr 1 at p(h;1,2) = p(h;3,2) & MHand(h;1) & MHand(h;2) har vi åpenbart for oss et moteksempel til (G). Mao. følger: ¬G. QED.

I lys av teoremet ovenfor, som forsåvidt viser at man ikke uten videre kan godta T og D1 om man er tilbøyelig til å betrakte prinippet G som plausibelt, foreslår Prawitz en modifikasjon av disse to teser. Fra disse modifikasjonene kan man ikke lenger utlede ¬G under de forutsetninger som er nevnt. Vi skal nå gjøre rede for disse to modifiserte teser, men før vi kan formulere dem innenfor vår ramme er det nødvendig å innføre ytterligere noen begrepsdannelser.

Anta h er en handling. Da definerer vi uttrykket "Tidsintervallet til h" ved å si at dette betegner intervallet [(it)(Beg(t,h)),(it)(Avsl(t,h))]. Mao. er tidsintervallet til en handling klassen av alle tidspunkter som ligger mellom begynnelsestidspunktet til handlingen og avslutningstidspunktet, inkludert disse tidspunktene. Forøvrig gjør vi oppmerksom på at notasjonen "[t;1,t;2]" er definert ved [t;1,t;2] = Mg(t: t;1≤ t≤t;2). Det kan være fordel å bruke et kort uttrykk istedet for "Tidsintervallet til h"; vi skal benytte uttrykket "TInt(h)"

En handling h;1 sies nå å være inneholdt i en annen handling h;2 hvis og bare hvis de to handlingene er aktøridentiske, tidsintervallet til h;1 er inkludert i tidsintervallet til h;2 og utsagnskomponenten i h;2 logisk sett impliserer utsagnskomponenten i h;1. Denne definisjonen kan formaliseres slik:

Con(h;1,h;2) <-> (Ai)(iê{1,2}->MHand(h;i)) & TInt(h;1) Inkl TInt(h;2) &
p(h;1,2)=p(h;2,2) & s(p(h;2,1)) Inkl s(p(h;1,1))

Vi kan nå formulere de reviderte versjonene av den utilitaristiske tesen T og definisjonen D1 som fremlegges av Prawitz. Istedet for den tidligere definisjon av handlingsalternativ, D1, foreslås nå den følgende definisjon som fremkommer ved å sløyfe kravet om tidsidentitet:

(D2) ALT;w(h;1,h;2) <->[MHand(h;1) &MHand(h;2)&
p(h;1,2) = p(h;2,2)&M;t(p(h;1,1),p(h;1,2),w)&
M;t(p(h;2,1),p(h;2,2),w)&s(p(h;1,1))Ωs(p(h;2,1)) =ø]

Tesen T revideres slik at den sier at en handling bør utføres hvis og bare hvis den er inneholdt i en handling h som er slik at konsekvensene til h er bedre enn dem til ethvert alternativ til h:

(T1) Bør;w(h) <-> (Eh;2)(Con(h,h;2) &(Ah;1)(ALT;w(h;1,h;2) -> BeK;w(h;2,h;1)))

La oss se på hvorfor de vanskelighetene som var forbundet med T og D1 i forbindelse med det eksempel som ble gitt ovenfor ikke oppstår i forbindelse med T1 og D2. Siden handlingen a, å studere filosofi, nå er inneholdt i handlingen aΩb, å studere filosofi i Uppsala, og denne har bedre konsekvenser enn alle alternativer, følger nå i lys av (T1) at såvel a som aΩb bør utføres. Dette innbærer at man ikke lenger kommer i konflikt med prinsippet (G).

Likevel synes ikke prinsippene (D2) og (T1) å være helt uproblematiske og Bergstrøm fremlegger et argument mot (T1) og (D2). Vi skal først gi et resyme av Bergstrøms argument og dernest fremlegge en mer formalisert versjon av det.

Bergstrøm argumenterer for at de to nevnte prinsipper er uakseptable fra et utilitaristisk perspektiv og forsøker å underbygge dette med et eksempel som har den

følgende struktur. Vi betrakter to tidsidentiske og inkompatible handlinger a;1 og b;1 hvis tidsintervall er, la oss si, [t;1,t;2] og to andre - også tidsidentiske og inkompatible handlinger a;2 og b;2 hvor tidsintervallet [t;2,t;3] kommer umiddelbart etter. Videre gjør vi de følgende tre antagelser, man kan i denne forbindelse studere figuren nedenfor:

(a) Den sammensatte handlingen b;1Ωb;2 har bedre konsekvenser enn ethvert alternativ; som et spesialtilfelle, bedre konsekvenser enn a;1Ωa;2.

(b) Handlingen a;1 blir faktisk utført.

(c) a;1Ωa;2 har bedre konsekvenser enn a;1Ωb;2

I lys av (b) og (c), er det rimelig å anta at også a;2 har bedre konsekvenser enn b;2, og vi kan også gjøre den ytterligere antagelse:

(d) a;2 har bedre konsekvenser en enhver alternativ handling som er utførbar etter tidspunktet t;2

Fra (T1) og (a) kan vi trekke den slutning at:

(C1) b;2 bør utføres.

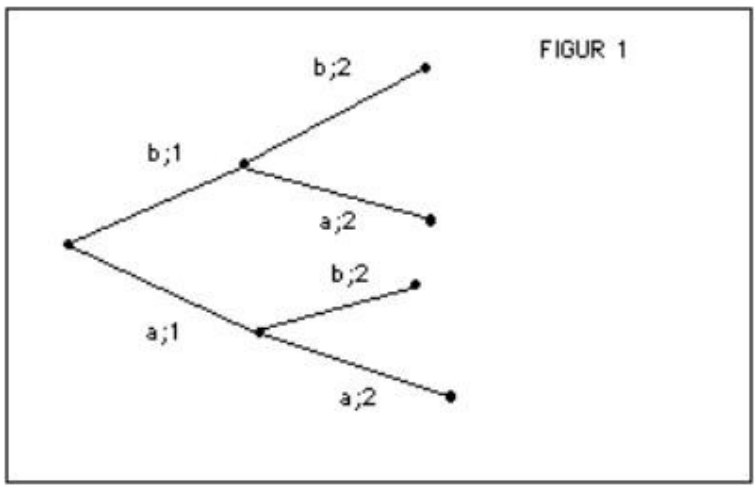
Men fra en utilitaristisk synsvinkel virker det nærliggende, i lys av (b) og (c), å insistere på at

(C2) Det er ikke tilfelle at b;2 bør utføres.

Faktisk burde man i lys av (b) og (d) insistere på at

(C3) a;2 bør utføres.

FIGUR 1



Dette eksemplet synes å vise at dersom man aksepterer prinsippet T1 og ellers insisterer på visse synspunkter som virker rimelige fra en utilitaristisk synsvinkel må man akseptere de meget bekymringsfulle konklusjonene C1 - C3 om man aksepterer muligheten av at det kan eksistere handlinger som oppfyller kravene (a) - (d). Aksepterer man ikke disse konklusjoner synes man henvist til enten å forkaste T1 eller noen av de utilitaristiske synspunkter som ligger til grunn, eller eventuelt begge deler.

Vi skal nå formalisere dette argumentet. I denne forbindelse skal vi først betrakte de følgende åpne setninger i språket til teorien HT utvidet med konstruksjonene (1) - (5) som vi introduserte ovenfor. Vi betegner disse åpne setningene med (S1) - (S8). Først betrakter vi de følgende åpne setninger:

(S1) <a;1,b;1>,<a;2,b;2> ê Prod(U,U)

(S2) M;t(a;1Ωa;2, x,w) &M;t(a;1Ωb;2, x,w) &
M;t(b;1Ωa;2, x,w) &M;t(b;1Ωb;2, x,w)

(S3) s(a;1)Ωs(b;1)=ø &s(a;2)Ωs(b;2)=ø

(S4) Br(a;1,x,w)
(S5) TInt(<a;1,x>)=TInt(<b;1,x>)=[t,t;1] &
TInt(<a;2,x>)=TInt(<b;2,x>)=[t;1,t;2] & t<t;1<t;2 & t, t;1, t;2êT
(S6) (Ah)(ALT;w(h,<b;1Ωb;2,x>) -> Bk;w(<b;1Ωb;2,x>,h))

Man ser at den første av disse setningene uttrykker at a;1, a;2, b;1 og b;2 er utsagn. Fra dette og S2 følger at <a;1,x>, <a;2,x>, <b;1,x> og <b;2,x> representerer utførbare handlinger. Fra S3 ser man at <a;1,x> og <b;1,x> er inkompatible, videre at <a;2,x> og <b;2,x> er inkompatible. Det fremgår også at disse handlingene er aktøridentiske. Tar man hensyn til S5 fremgår det også at de nevnte handlinger er tidsidentiske. Tar man nå videre i betraktning setningene S4 og S6 ser man at de åpne setningene vi så langt har gjort rede for svarer til forutsetningene (a) og (b), samt de forutsetningene som ble nevnt umiddelbart foran disse i forbindelse med eksemplet ovenfor.

Før vi går videre gjør vi oppmerksom på at vi sier at en handling <a,x> er utførbar for x etter tidspunktet t i verdenen w, i symboler "PFe(h,x,t,w)", hvis og bare hvis vi har (Et')(t'≥t & M;t'(a,x,w)). De to siste setningene er da de følgende:

(S7) Bk;w(<a;1Ωa;2,x>,<a;1Ωb;2,x>)
(S8) (Ah)(PFe(h,x,t;1,w) & ALT;w(h,<a;2,x>).-> Bk;w(<a;2,x>,h))

Det skulle vel være temmelig innlysende at disse to setningene svarer til forutsetningene (c) og (d) i eksemplet ovenfor. Dette avslutter vår liste over de åpne setninger vi skal betrakte.

Lukningen av den kondisjonalsetningen som har konjunksjonen av setningene (S1) - (S5) og (S7) som antesedent og formelen ¬Bør;w(<b;2,x>) som konsekvent kaller vi for UT1.

Lukningen av den kondisjonalsetningen som har konjunksjonen av setningene (S1) - (S5) og (S8) som antesedent og formelen Bør;w(<a;2,x>) som konsekvent kalles for UT2.

Vi formulerer nå de følgende to teoremer som formaliserer innholdet i eksemplet ovenfor.

TEOREM 6.2: *Anta a;1, b;1, a;2, b;2, x, t, t;1, t;2 og w er entiteter som oppfyller kravene (S1) - (S8). Anta videre at Prawitz´ T1 og D1 holder. Anta tilslutt at UT1 holder. Da gjelder Bør;w(<b;2,x>) & ¬Bør;w(<b;2,x>).*

Bevis: Fra definisjonen av Con og premissene i teoremet følger umiddelbart at Con(<b;2,x>,<b;1Ωb;2,x>). Fra dette (S6) og T følger så Bør;w(<b;2,x>). Fra premissene i teoremet og UT1 følger imidlertid det motsatte, nemlig : ¬Bør;w(<b;2,x>). Dette avslutter beviset. **QED**

Den andre satsen vi skal nevne er denne:

TEOREM 6.3: *Anta a;1, b;1, a;2, b;2, x, t, t;1, t;2 og w er entiteter som oppfyller kravene (S1) - (S8). Anta videre at Prawitz´ T1 og D1 holder. Anta tilslutt at UT2 holder. Da gjelder Bør;w(<b;2,x>) & Bør;w(<a;2,x>).*

Bevis: Fra definisjonen av Con og premissene i teoremet følger umiddelbart at Con(<b;2,x>,<b;1Ωb;2,x>). Fra dette (S6) og T følger så Bør;w(<b;2,x>). Fra premissene i teoremet og UT2 følger imidlertid det motsatte, nemlig : ¬Bør;w(<b;2,x>). Dette avslutter beviset. **QED**

Man ser at bevisene for Teorem 6.1 og Teorem 6.2 er ytterst trivielle. Fra en rent deduktiv synsvinkel fremstår de derfor som svært overfladiske. Men dette er ikke det vesentlige her. Poenget er at disse enkle teoremet viser at det åpenbart er en konflikt mellom tesen T1&D1 på den ene side, og tesene UT1 og UT2 på den annen. Siden man – i alle fall prima facie – kunne være tilbøylig til å hevde at det virker plausibelt å påstå at Bør;w(<a;2,x>) burde være

tilfelle om antesedenten i UT1 holder, fremstår UT1 som et tilsynelatende rimelig prinsipp. Det samme gjelder UT2. De burde kunne aksepteres på utilitaristisk grunnlag. Siden imidlertid konsekventene i Teorem 6.1 såvel som Teorem 6.2 virker besynderlige gitt premissene i teoremet er det derfor svært nærliggende å trekke T1&D1 i tvil.

La oss oppsummere resultatene fra denne gjennomgåelse av en del av det stoff om handlingsalternativer som presenteres av Bergstrøm og Prawitz. Vi har sett at det tilsynelatende rimelige utilitaristiske prinsipp T leder til nokså eiendommelige resultater om man innfører termen "handlingsalternativ" som ved D1. Vi har videre sett at hvis T endres til T1, og D1 endres til D2, unngås noen av disse urimelige konsekvensene. Men tesen T1&D1 synes å passe mindre bra sammen med de to prinsippene UT1 og UT2 som i alle fall prima facie kunne sies å være i besittelse av en viss plausibilitet. Hvis man derfor vil holde fast ved et eller annet utilitaristiske prinsipp av typen T eller T1 er det i så fall nærliggende å søke etter en eller annen definisjon av handlingsalternativ som på en eller annen måte er bedre enn D1 eller D2. I lys av den meget nyanserte - og langt fra overfladiske - diskusjon av dette som foreligger i de nevnte arbeider av Bergstrøm og Prawitz, og som vi bare har referert deler av, synes det å fremgå at dette slett ikke er noen lett oppgave.

II

Det er i høyeste grad av interesse å sammenligne den teori om handlingsalternativer som vi tidligere har presentert med de definisjoner vi formulerte ovenfor og som ble drøftet av Prawitz og Bergstrøm. I denne paragrafen skal vi gjøre dette. La oss da med en gang peke på at vi ikke har formulert noe prinsipp som svarer til T og som passer med det handlingsalternativ-begrep vi innførte i forbindelse med HT. Vi skal derfor utvide språket til teorien HT med ytterligere to predikatkonstruksjoner slik at vi kan formulere et prinsipp som svarer til prinsippene T og T1 innenfor vår ramme. I denne forbindelse dreier det seg om de følgende to konstruksjoner:

(1) "Bk;w(h;1,h;2)". Denne konstruksjonen leses "Handlingsalternativet h;1 har bedre konsekvenser enn handlingsalternativet h;2 i verdenen w"

(2) "O;w(h,x,t)". Dette uttrykket forkorter "x bør realisere handlingsalternativet h ved tidspunktet t i verdenen w"

I avsnitt (I) innførte vi som man husker relasjonen BeK. Men dette er en relasjon mellom handlinger, og det bør bemerkes at handlingsalternativer ikke uten videre er med i domenet til denne relasjonen. Av denne grunn trenger vi relasjonen Bk ovenfor. Vi betrakter nå det følgende prinsipp, som er det prinsipp vi skal betrakte som svarer til T og T1 ovenfor:

(U1) $O;w(h,x,t) \leftrightarrow [Alt;w(h,x,t) \& (Ah;1)(h;1 \neq h \& Alt;w(h;1,x,t) \rightarrow Bk;w(h,h;1)]$

Som man ser uttrykker U1 at en person x bør realisere et bestemt handlingsalternativ h i verdenen w fra og med tidspunktet t hvis og bare hvis h faktisk er et handlingsalternativ som står åpent for x ved t i denne verden og konsekvensene av dette alternativ er bedre enn alle andre alternativer som står åpne for x ved t i verdenen w. Litt anderledes formulert er U1 det utilitaristiske prinsipp at man bør velge det handlingsalternativ som har bedre konsekvenser enn alle andre handlingsalternativer som står åpne.

U1 er ikke et prinsipp som forfatteren uten videre går god for. Vi har overhodet ikke tatt noen stilling til det. Det må likevel meddeles at vi er skeptiske og nærer en viss mistenksomhet i forbindelse med dette prinsipp.

Når det gjelder relasjonen Bk skal vi anta at denne er transitiv og irrefleksiv og at den er begrenset til handlings-alternativer. Vi skal med andre ord forutsette:

B1 Bk;w(h;1,h;2) -> wêI & (Et)(Ex)Alt;w(h;1,x,t) &(Et)(Ex)Alt;w(h;1,x,t)
B2 Bk;w(h;1,h;2) &Bk;w(h;2,h;3) -> Bk;w(h;1,h;3)
B3 (Et)(Ex)Alt;w(h;1,x,t) -> ¬Bk;w(h;1,h;1)

Vi har nå redegjort for de forhold som er nødvendige for å sammenligne vår definsjon av handlingsalternativ med definisjonene D1 og D2 ovenfor. Videre skulle det nå vær mulig å sammenligne tesene T, T1 og U1.

La oss først starte med vår definisjon av handlingsalternativ.

Det første man legger merke til er at vi definerer et fire-plasspredikat "h er et handlingsalternativ som står åpent for aktøren x ved tidspunktet t i verdenen w", mao. " Alt;w(h,x,t)", mens det som defineres ved D1 og D2 er et treplass-predikat: "ALT;w(h;1,h;2)", som leses "Handlingen h;1 er et handlingsalternativ til handlingen h;2 i verdenen w". Man legger da merke til at i definisjon D1 og D2 er tidsparameteren t fraværende i selve definiendum-uttrykket. Det samme gjelder aktørparameteren x som også er fraværende i definiendum-uttrykket i D1 og D2. Videre kan det sies at man i D1 og D2 innfører en alternativrelasjon mellom handlinger indeksert på klassen av mulige verdener. Strengt tatt har ikke vi gjort dette i HT. Vi har derimot definert en funksjon som til ethvert triple <x,t,w>êProd(P,T,I) tilordner en klasse av entiteter, nemlig klassen av de handlingsalternativer som står åpne for x relativt til t i verdenen w. Det bør da også bemerkes at handlingsalternativer i vår forstand strengt tatt ikke er handlinger.

Imidlertid finner man igjen endel av de momenter som er tatt med i definisjonene D1 og D2 i vår definisjon. Vi kan selvfølgelig tenke oss at vi definerer uttrykket "h;1 er et handlingsalternativ til h;2 for personen x relativt til tidspunktet t i verdenen w" ved å si at dette uttrykket skal være oppfylt hvis og bare hvis Alt;w(h;1,x,t)&Alt;w(h;2,x,t). I så fall vil vi ha innført en relasjon mellom handlingsalternativer indeksert på tripler av typen <x,t,w>. Som man umiddelbart innser vil denne relasjonen være en ekvivalensrelasjon, dvs. transitiv, refleksiv og symmetrisk. De alternativrelasjonene som er innført ved D1 og D2 har imidlertid ikke uten videre disse egenskaper. På dette punkt er det derfor en klar forskjell mellom vår teori og det som følger fra D1 og D2.

Det fremgår nå at det fra vår definisjon og de aksiomer som inngår i HT er mulig å utlede at <SNu(h),x> er en mulig handling om vi har Alt;w(h,x,t). La oss se på hvorfor. Fra definisjonen av Alt følger, om Alt;w(h,x,t), at h er et element i en basis for Q(w,x,t); ie. det finnes en C der vi har Bas(C,Q(w,x,t)) & hêC. Fra dette og aksiomet AT6 følger så at det finnes w der man har:

wêI &wê(Br*(SNu(h),x)).

Men dette og den definisjon vi tidligere har gitt av "mulig handling" impliserer at <SNu(h),x> er en mulig handling. Det følger også, siden Bas(C,Q(w,x,t))&hêC, at hêRgn(Q(w,x,t)). Fra dette og vår definisjon av Q følger at det finnes a slik at M;t(a,x,w) & h=k({a}). Men siden vi åpenbart har at SNu(h)= SNu(k({a})) =a følger M;t(SNu(h),x,w). Dette innebærer at handlingen <SNu(h),x> også er utførbar slik vi definerte utførbarhet ovenfor. La oss også bemerke det følgende forhold: Har vi Alt;w(h;1,x,t)&Alt;w(h;2,x,t) , kan vi, på samme måte som ovenfor, slutte fra den definisjonen vi har gitt av Alt at det må finns C der Bas(C,Q(w,x,t)) og hvor h;1êC & h;2êC. Men de enkelte elementer i en basis for en teorifamilie er uforenelige. Dette innebærer derfor at SNu(h;1)ΩSNu(h;2) =ø. I sin tur har dette som konsekvens at de to mulige handlingene <SNu(h;1),x> og <SNu(h;2),x> er uforenelige.

Oppsummerer vi betraktningene ovenfor ser man følgelig at hvis h;1 er et handlingsalternativ til h;2 for personen x relativt til tidspunktet t i verdenen w så gjelder det

følgende: <SNu(h;1),x> og <SNu(h;2),x> er mulige handlinger som er aktøridentiske, utførbare og inkompatible. Disse tre momentene inngikk i definiens i såvel D1 som D2. Derimot kan vi ikke slutte at de to handlingene er tidsidentiske. Som man ser fra diskusjonen av de eksempler som vi tidligere har gitt i forbindelse med handlingsalternativer er det intet i HT som tilsier at to handlingsalternativer nødvendigvis har den samme utstrekning i tid.

Vi har så langt sett på endel likheter og forskjeller mellom de definisjoner av alternativrelasjonen som ble drøftet av Prawitz og Bergstrøm, og den definisjon som ble gitt i forbindelse med teorien HT.

La oss nå se hvorvidt de mer paradoksale resultater som tidligere ble diskutert i avsnitt I oppstår i forbindelse med teorien HT utvidet med predikatene ovenfor og supplert med prinsippene U1 og B1 - B3. Studerer man det eksemplet vi omtalte tidligere i forbindelse med Teorem 6.1 ble det der forutsatt at en bestemt aktør, Karl, ved et bestemt tidspunkt hadde følgende handlingsmuligheter: studere filosofi i Uppsala, ikke studere filosofi, studere filosofi og endelig studere filosofi i Oxford. Det er intet i veien for at vi kan se på disse fire mulighetene som utsagn som beskriver forhold som det står i Karls makt å realisere relativt til det relevante tidspunkt. Holder vi oss nå til vår definisjon av handlingsalternativ kan imidlertid ikke alle disse utsagnene representere handlingsalternativer. Hvis vi tenker oss at utsagnet at Karl studerer filosofi i Uppsala representerer et handlingsalternativ som står åpent ved det gitte tidspunkt, kan ikke utsagnet at han studerer filosofi representere noe alternativ ved dette tidspunkt. I så fall måtte disse to utsagnene være logisk sett uforenelige, noe de åpenbart ikke er. Holder man seg derfor til teorien HT vil bare de tre resterende utsagn muligens kunne regnes som alternativer som står åpne for Karl relativt til det relevante tidspunkt. Men tenker man seg da at av disse har det å studere filosofi i Uppsala best konsekvenser så bør Karl ifølge U1 velge dette alternativ. Såvidt vi kan se oppstår det derfor ingen problemer med dette eksemplet i forbindelse med HT utvidet med det utilitaristiske prinsipp U1.

I lys av de nokså uheldige konsekvensene som kunne utledes fra D1 og T betraktet Prawitz muligheten av å endre disse til D2 og T1. Som det ble påpekt ovenfor kunne man imidlertid også rette innvendinger mot disse to prinsippene. Dette gjør det naturlig å spørre om teorien HT utvidet med U1 kan møte disse innvendinger.

I forbindelse med FIGUR 1 kan vi tenke oss at handlingene a;1Ωb;2, a;1Ωa;2, b;1Ωa;2 og b;1Ωb;2 representerer handlingsalternativer som står åpne for aktøren x ved tidspunktet t;1 i verdenen w. Hvis nå x velger å realisere et av disse alternativene hvor man man først starter med å utføre a;1 vil x ved tidspunktet t;2 kunne velge mellom b;2 og a;2. Disse handlingene vil da representere de alternativer som står åpne for x ved dette senere tidspunkt. Helt tilsvarende forhold vil gjelde om x først realiserer b;1. Ved tidspunktet t;2 vil da b;2 og a;2 være de handlingsalternativene som står åpne. La oss nå forutsette at verdiene av konsekvensene til de forskjellige alternativene som står åpne for x ved t;1 er som vi fastla da vi introduserte figuren. Det følger da at ved tidspunktet t;1 er alternativet b;1Ωb;2 det som har best konsekvenser i verdenen w. Prinsippet U1 impliserer i så fall at

(i) b;1Ωb;2 er det alternativet som x bør utføre relativt til tidspunktet t;1 i verdenen w.

I den situasjon som er eksemplifisert ved FIGUR 1 velger imidlertid aktøren å utføre a;1. Ved tidspunktet t;2 er det derfor bare alternativene a;2 og b;2 som står åpne. Men fra de forutsetningene som ble gjort gikk det frem at alternativet a;2 hadde bedre konsekvenser enn alternativet b;2. Fra U1 følger derfor at

(ii) a;2 er det alternativet som x bør utføre relativt til tidspunktet t;2 i verdenen w

Man ser imidlertid at (i) og (ii) ikke motsier hverandre. Dette eksemplet, som synes å skape vanskeligheter i forbindelse med konjunksjonen av D2 og T1, synes derfor ikke å skape noen spesielle problemer - i hvert fall ikke av ren logisk art - i forbindelse med tesen U1. Grunnen

til dette er det ikke så vanskelig å se. Innføres en relativ konstruksjon som "Handlingsalternativet h bør utføres av x ved tidspunktet t i verdenen w" er det intet som hindrer, logisk sett, at et bestemt handlingsalternativ h bør utføres relativt til et bestemt tidspunkt, men ikke bør utføres relativt til et annet.

Vi skal nå forsøke å vise hvordan eksemplet ovenfor kan behandles innenfor den rammen vi har fiksert og i denne forbindelse formulere og bevise en sats som viser at i akkurat den situasjonen som vi drøftet i forbindelse med FIGUR 1 oppstår det ingen spesielle problemer for teorien HT utvidet med U1. Dette har vi for så vidt antydet ovenfor, men det kan likevel være avinteresse å formulere resultatet presist. Det har vi ikke gjort ovenfor. La oss først betrakte FIGUR 2 nedenfor. Det skulle fremgå fra denne figuren at den illustrerer en situasjon som er svært lik den vi har forsøkt å illustrere ved FIGUR 1.

På figuren er det meningen at de fire hovedgrenene, f.eks. grenen b;1, b2, skal representere handlingsalternativer som står åpne for individet x ved tidspunktet t;1. Når det gjelder de enkelte undergrener, f. eks. b;2, a;2 etc. er det tanken at disse skal representere handlingsalternativer som står åpne for individet x ved tidspunktet t;2. A1 - A4 representerer mengder av mulige verdener. De enkelte hovedalternativer, f. eks. b;1, a;1, står åpne for x ved t;1 i enhver verden som er med i unionen av alle disse mengdene. Alternativet a;2 er bare åpent for x ved t;2 i de verdenene som inngår enten i A3 eller A4. Tilsvarende er alternativet b;2 bare åpent for x ved t;2 i de verdenene som inngår enten i A1 eller A3 Figuren er ment å gi en helt uformell illustrasjon til forutsetningene i den sats som vi formulerer nedenfor.

Forutsetningene i denne satsen er de følgende åpne setninger:

(P1) a;1,b1ê U

(P2) a;2, b;2 ê U

(P3) A;1,...,A4 er disjunkte, ikke-tomme mengder av mulige verdener. Dette innebærer at:
(Ai)(Aj)(i,jê{1,...,4} & i≠j -> A;iΩA;j =ø)
(Ai)(iê{1,...,4} -> A;i≠ø) & UN/i,1,4/(A;i) Inkl I

(P4) s(a;1) = A;1UA;2 s(b;1) = A;3UA;4
s(a;2) = A;2UA;4 s(b;2) = A;1UA;3

(P5) (Aw)(wêUN/i,1,4/(A;i) .->.
{k({a;1Ωa;2}), k({a;1Ωb;2}), k({b;1Ωb;2}), k({b;1Ωa;2})}
Inkl Mg(h : Alt;w(h,x,t;1))

(P6) (Aw)(wêUN/i,1,2/(A;i) .->.
{k({a;2}), k({b;2})} Inkl Mg(h : Alt;w(h,x,t;2))

(P7) (Aw)(wêUN/i,3,4/(A;i) .->.
{k({a;2}), k({a;b;2})} Inkl Mg(h : Alt;w(h,x,t;2))

Det fremgår av setningene (P1) - (P7) at a;1, a;2, b;1 og b;2 er utsagn, videre at sannhetsmengdene til a;1 og b;1 er hhv. A1UA2 og A3UA4 og at sannhetsmengdene til b;1Ωb,2, b;1Ωa;2, a;1Ωb,2, a;1Ωa;2 er hhv. A1 - A4. Det fremgår også at A1 - A4 er innbyrdes disjunkte mengder av mulige verdener og at unionen av dem er inkludert i klassen av mulige verdener I. Endelig fremgår det at de diverse utsagnsmengdene k({a;1Ωa;2}), k({a;1Ωb;2}), k({b;1Ωb;2}), k({b;1Ωa;2}) representerer handlingsalternativer som står åpne for x ved t;1 i alle verdener som er med i A1U...UA4. Videre sier (P6) at k({a;2}), k({a;2}) er de alternativer som står åpne for x ved tidspunktet t;2 i verdenene som er elementer i A1UA2. P7 sier at k({a;2}), k({b;2}) representerer de alternativer som er åpne for x ved t;2 i de verdenene som inngår i A3UA4.

(P8) (Aw)(wêUN/i,1,4/(A;i) .->.
(Ah)(Alt;w(h,x,t;1) & h≠k({b;1Ωb;2}).->. Bk;w(k({b;1Ωb;2}),h))

(P9) (Aw)(wêUN/i,3,4/(A;i) .->
(Ah)(Alt;w(h,x,t;1) & h≠k({a;2}).->. Bk;w(k({a;2}),h))

Når det gjelder P8 ser man at denne setningen angir hvordan alternativene som står åpne for x ved t;1 er relatert med hensyn på verdien til sine konsekvenser i alle verdener som er med i A1U...UA4. P9 uttrykker at når det gjelder de alternativer som står åpne for x ved t;2 i de verdener som er med i A3UA4 så har alternativet k({a;2}) bedre konsekvenser enn alle andre alternativer i alle disse verdenene. Dette avslutter angivelsen av kravene.

La oss kalle konjunksjonen P1 - P9 av Prem 1, og lukningene av prinsippene U1 og B1 - B3 for Hypotese 1. Vi skal forsøke å se på hva som følger fra denne hypotesen og forskjellige varianter av den i form av visse teoremer. Det bør med en gang bemerkes at disse teoremene er av en temmelig triviell natur teknisk sett. Vår første sats er denne:

TEOREM 6.4: *Anta Hypotese 1 holder. Anta at a;1, b;1, a;2, b;2 og A1 - A4 er entiteter som oppfyller kravet Prem 1 og dessuten at h;1= k({b;1Ωb;2}), samt at h;2= k({a;2}). Anta tilslutt at wê A3UA4. Da har vi:*

O;w(h;1,x,t;1) & O;w(h;2,x,t;2)

Bevis : Egentlig er dette beviset helt trivielt. Fra P5 og P8 følger det at O;w(h;1,x,t;1) for alle wêUN/i,1,4/(A;i) i lys av prinsippene U1 og B1 -B4. Men da holder dette selvfølgelig også om wêA;3UA;4 Inkl UN/i,1,4/(A;i). Videre har vi i lys av P7 og P9 i hypotesen at O;w(h;2,x,t;2) om wêA;3UA;4 siden prinsippene U1 og B1 -B4 forutsettes å holde. **QED**.

La oss på dette punkt foreta en kort oppsummering av våre overveielser i denne paragrafen. Vi har sammenlignet den handlingsalternativ-teorien vi har formulert, HT, utvidet med setningen U1, med to av de teorier som har blitt diskutert av Prawitz og Bergstrøm. Man kan neppe trekke noen vidtgående slutninger fra denne sammenligning. Men det synes rimelig, på grunnlag av de overveielser som har blitt fremlagt, å si at teorien vi har formulert tilsynelatende ikke rammes av de innvendingene som kan reises mot teoriene som vi formulerte og undersøkte i I. Forsåvidt kan dette oppfattes som noe som taler til fordel for teorien HT utvidet med U1. Det virker heller ikke urimelig å si at U1 uttrykker en form for utilitarisme. De vanskeligheter som er forbundet med tese-parene D1&T og D2&T1 behøver derfor ikke umiddelbart å oppfattes som vanskeligheter som oppstår i forbindelse med en hvilken som helst form for utilitarisme. En viktig forskjell mellom T og T1 på den ene side og U1 på den annen er man i U1 begrenser seg til handlingsalternativer og ser på spørsmålet om hvorvidt et handlingsalternativ bør utføres som avhengig av hvilket tidspunkt man befinner seg ved. Dette er ikke tilfelle i forbindelse T og T1. I U1 benyttes den tidsrelative konstruksjon "x bør realisere handlingsalternativet h ved tidspunktet t i verdenen w", mens man i forbindelse med T og T1 benytter den mer absolutte konstruksjon "h er en handling som bør utføres i verdenen w". De problemer som ble drøftet ovenfor i forbindelse med T1 synes nettopp å ha sammenheng med dette. Benytter man seg av den sistnevnte konstruksjon er det jo svært vanskelig å uttrykke den tanke at en person ved et gitt tidspunkt t bør utføre handlingen h;1 og dernest h;2, og samtidig bør la være å utføre h;2 ved et senere tidspunkt t' dersom vedkommende unnlot å utføre h;1.

§7 Konsistensbevis og modeller for teorien HT.

I denne paragrafen skal vi gi et bevis for at teorien HT er konsistent relativt til E;3.

Dette innebærer at vi skal vise at hvis man kan dedusere en motsigelse i teorien HT, dvs. en setning av typen a&¬a, så kan man også dedusere en motsigelse i E;3. Siden alle de ikke-logiske aksiomene i vår versjon av Zermelo-Fraenkel-systemet inngår som ikke-logiske aksiomer i HT er det selvfølgelig , i lys av Gødels teorem, umulig å gi noe "absolutt" bevis for at HT er konsistent i den forstand at vi på basis av aksiomene i HT kan vise riktigheten av en setning av typen "HT er konsistent".

Vi skal i det følgende forutsette riktigheten av den følgende meta-logiske sats:

TEOREM 7.1: *La R være setningen I=Reell, altså den setningen i L(E;3) som sier at mengden av de logisk mulige verdener er identisk med mengden av de reelle tall. Da er teorien E;3 utvidet med R som et nytt ikke-logisk aksiom, ie. E;3[R] konsistent om E;3 er konsistent.*

På basis av de resultater og bevis-teknikker som det har blitt redegjort for i Rognes [3] og Rognes [4] skulle det være forholdsvis lett å innse hvordan man beviser satsen ovenfor. Vi skal derfor rett og slett ta teoremet ovenfor for gitt og sløyfer beviset.

I det følgende betegner "Fm(L(HT))" klassen av alle de velformede formler i språket til teorien HT. "L(HT)" betegner språket til teorien HT. Er L et vilkårlig første-ordens språk betegner "Fm(L)" klassen av de velformede formlene i L. Hovedresultatet i denne paragrafen er det følgende teorem som viser at teorien HT er konsistent relativt til teorien E;3[R]. Siden denne teorien i sin tur, ifølge Teorem 7.1, er konsistent relativt til E;3, følger det at HT er konsisten relativt til E;3.

TEOREM 7.2: *Det finnes en funksjon f som avbilder Fm(L(HT)) inn i Fm(L(E;3)) og som oppfyller de følgende krav:*

(i) *(Aa)(aêFm(L(E;3)) –> f(a)=a)*

(ii) *Er a et vilkårlig aksiom i teorien HT har vi at f(a) er et teorem i E;3[R].*

(iii) *Er a,b êFm(L(HT)) og er f(a) og f(a–>b) teoremer i E;3[R] så er også f(b) et teorem i E;3[R].*

(iv) *Er a en formel i L(HT), x et variabeltegn i L(HT) og f(a) et teorem i E;3[R] så er også (Ax)a et teorem i E;3[R]*

(v) *Er aêFm(L(HT)) har vi f(a&¬a) = f(a)& ¬f(a)*

Vi skal gi et bevis for Teorem 7.2 nedenfor. Faktisk er beviset såpass langt at vi må gjøre det i flere trinn.

La oss imidlertid først se på hvorfor Teorem 7.2 impliserer at teorien HT er konsistent relativt til E;3[R]. Nå er klassen av teoremer i teorien HT den minste klassen av formler i språket til HT som for det første inneholder alle de logiske aksiomene i teorien HT samt lukningene av alle de ikke-logiske aksiomene i HT, og som for det andre er lukket under de to slutningsreglene modus ponens og universell generalisering. Fra punkt (ii) -(iv) i teoremet ovenfor følger det derfor ved induksjon på klassen av teoremer i HT at ethvert teorem a i denne teorien er slik at f(a) er et teorem i E;3[R]. Bruker vi uttrykket "Th(x,y)" som forkortelse for "x er et teorem i teorien y" kan dette uttrykkes konsist slik:

(1) (Aa)(Th(a,HT) –> Th(f(a), E;3[R]))

Anta nå mot formodning at HT er inkonsistent. Da vil det finnes en formel b i L(HT) slik at Th(b&¬b, HT). Fra dette og (1) følger da åpenbart Th(f(b&¬b), E;3[R]). Fra dette og punkt (v) i teoremet følger da Th(f(b)&¬f(b), E;3[R]). Men siden f(b) er en formel i L(E;3) innebærer dette at det finnes en formel c i dette språket slik at c&¬c er bevisbar i E;3[R]. Dette impliserer at E;3[R] er inkonsistent. Vi har følgelig om Teorem 7.2 holder at hvis HT er inkonsistent så er også E;3[R] inkonsistent. Men da følger at hvis E,3[R] er konsistent så

må også HT være det, mao. at HT er konsistent relativt til E,3[R]. Siden E;3[R] er konsistent relativt til E;3 ifølge Teorem 7.1 følger at HT også må være det.

Fra overveielsene ovenfor fremgår det at det vil være helt tilstrekkelig å gi et bevis for Teorem 7.2.

For å gi et bevis for denne satsen vil det være nok å konstruere en avbildning f : Fm(L(HT)) –> Fm(L(E;3)) som oppfyller de krav som er nevnt i satsen. La oss nå starte med å gjøre dette.

f defineres ved induksjon på lengden av formlene i L(HT) på den følgende måte :

(d1) f(xêy) = (xêy)
(d2) f(Mng(x)) = (Mng(x))
(d3) f(MV(x)) = (MV(x))
(d4) f(True(w,x)) = (True(w,x))
(d5) f(Ut(x)) = (Ut(x))
(d6) f(At(x,y)) = (At(x,y))
(d7) f(MI(x)) = (MI(x))
(d8) f(H(x,y,w)) = (H(x,y,w))
(d9) f(x=y) = (x=y)

Dermed er f definert for alle de atomiske formlene som forekommer i L(E;3). Vi skal nedenfor i avsnitt A gjøre definisjonen fullstendig ved også å definere funksjonen f for de atomiske formlene som inngår i språket til HT, men som ikke er med i språket til L(E;3). Imidlertid må vi også angi hvordan f avbilder de formler i L(HT) som er bygd opp ved hjelp av de logiske konnektivene formler i L(E;3). Som man husker er de eneste primitive logiske konnektivene vi benytter i våre første ordens språk de følgende, nemlig: negasjonskonstruksjonen, "¬", konstruksjonen for materiell implikasjon, "–>", allkvantoren "A". Er a og b formler i L(HT) setter vi:

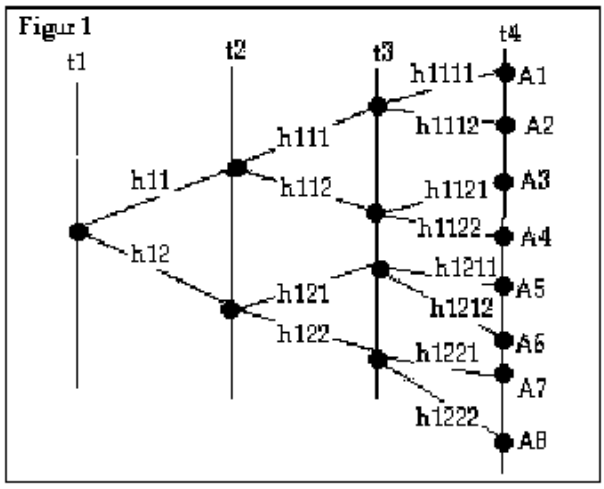
(d10) f(¬a) = ¬f(a)
(d11) f(a–>b) = f(a)–>f(b)

Er a en vilkårlig formel i L(HT) og x et variabeltegn setter vi:

(d12) f((Ax)a) = (Ax)f(a)

Dermed er f definert for alle formler i L(E;3). Men fra definisjonen av f så langt har vi ikke sagt noe om hva den tilordner de formler som er med i L(HT), men som ikke er med i L(E,3). Vi skal nå straks gjøre dette. Dette innebærer at vi vil angi hvilke åpne setninger i L(E;3) som f skal tilordne de atomære setningene "Tp(x)" , "x<;f y", "P(x)", "Br(u,x,w)" og "M;t(u,x,w)".

Men før vi gjør dette skal vi kommentere FIGUR 1 nedenfor, fordi de grunnleggende ideer bak vår intepretasjon av disse fem primitive predikatene i L(HT) egentlig kan utleses av figuren.



På FIGUR 1 er det meningen at t1,...,t4 representerer de tidspunkter som eksisterer i modellen. Vi skal dessuten anta at det bare finnes et individ p0. A1,...,A8 representerer innbyrdes disjunkte ikke-tomme mengder av mulige verdener. Det kan bemerkes at vi ikke uten videre antar at I = A1U...UA8. Snarere antar vi at A1U...UA8 Inkl I

Det er nå tanken at f.eks. h11 skal representere et utsagn som beskriver noe det står i individet p0´s makt å realisere relativt til tidspunktet t1 i alle de verde-ner som inngår i mengdene A1,...,A8. Det samme gjelder h12. Det er videre meningen at h111 og h112 skal representere utsagn som beskriver forhold det står i individet p0´s makt å realisere relativt til tidspunktet t2 i de verdenene som inngår i mengdene A1,...,A4, mens derimot h121 og h122 representerer handlingsalternativer som står åpne for p0 ved tidspunktet t2 i verdenene som inngår i mengdene A5,...,A8. Videre er det tanken at f,eks. h1212 og h1211 representerer de handlingsalternativene som står åpne for p0 ved tidspunktet t3 i verdenene som inngår i mengdene A5 og A6. Generelt representerer de enkelte uttrykk av typen h(p,q,r,s) der p,q,r,s ê{1,2} handlingsalternativer i modellen.

I en verden som inngår i mengden A1 vil det derfor,- som man ser fra figuren-, være slik at p0 ved tidspunktet t1 realiserer alternativet h11, ved tidspunktet t2 realiserer alternativet h111 og ved tidspunktet t3 realiserer alternativet h1111. Tar man derimot for seg en verden som inngår i mengden A6 ser man i en slik verden realiserer p0 handlingsalternativet h12 ved tidspunktet t1, alternativet h121 ved tidspunktet t2 og alternativet h1212 ved t3.

Dermed skulle vi med tilstrekkelig utførlighet ha antydet hvordan figuren skal tolkes.

A La oss nå fullføre definisjonen av funksjonen f. Først definerer vi uttrykkene "A1" - "A8" ved:

A1 = [0,1> A2 = [1,2> A3 = [2,3> A4 = [3,4>
A5 = [4,5> A6 = [5,6> A7 = [6,7> A8 = [7,8>

Man ser at uttrykkene til høyre i disse definisjonene er uttrykk i L(E,3). Fra disse definisjonene beviser man lett i E;3[R] (siden vi i denne teori har at I=Reell) at følgende holder:

(1.1) (Aj)(Ai)(i,jê{1,...,8} & i≠j.->.Sn(Ai,Aj)=ø)
(1.2) (Ai)(iê{1,...,8}.->. Ai Inkl I)
(1.3) (Ai)(iê{1,...,8}.->. Ai≠ø)

Videre definerer vi:

(2.1)

h11=A1U...UA4	h1111=A1	h1221=A7
h12=A5 U...UA8	h1112=A2	h1222=A8.
h111=A1 U A2	h1121=A3	
h112=A3 U A4	h1122=A4	
h121=A5 U A6	h1211=A5	
h122=A7 U A8	h1212=A6	

Vi definerer videre uttrykkene "t1" - "t4" ved å sette at t1 = 1, t2 = 2, t3= 3 og t4 = 4. Disse fire "tidspunktene" identifiseres altså med de naturlige tallene 1 - 4. Videre setter vi p0 = 0. Vi lar altså tallet 0 representere den eneste personen som eksisterer i vår modell. Vi setter per definisjon:

M*=d[Mg(<Z,p0,t1,w>: wê A1U...UA8 & Zêk({s;-1(h11)})) U
Mg(<Z,p0,t1,w>: wêA1U...UA8 & Zêk({s;-1(h12)})) U
Mg(<Z,p0,t2,w>: wê A1U...UA4 & Zêk({s;-1(h111)}) U
Mg(<Z,p0,t2,w>: wê A1U...UA4 & Zêk({s;-1(h112)}) U
Mg(<Z,p0,t2,w>: wê A5U...UA8 & Zêk({s;-1(h121)}) U
Mg(<Z,p0,t2,w>: wê A5U...UA8 & Zêk({s;-1(h122)}) U
Mg(<Z,p0,t3,w>: wê A1UA2 & Zêk({s;-1(h1111)}) U
Mg(<Z,p0,t3,w>: wê A1UA2 & Zêk({s;-1(h1112)}) U
Mg(<Z,p0,t3,w>: wê A3UA4 & Zêk({s;-1(h1121)}) U
Mg(<Z,p0,t3,w>: wê A3UA4 & Zêk({s;-1(h1122)}) U
Mg(<Z,p0,t3,w>: wê A5UA6 & Zêk({s;-1(h1211)}) U
Mg(<Z,p0,t3,w>: wê A5UA6 & Zêk({s;-1(h1212)}) U
Mg(<Z,p0,t3,w>: wê A7UA8 & Zêk({s;-1(h1221)}) U
Mg(<Z,p0,t3,w>: wê A7UA8 & Zêk({s;-1(h1222)})]

Dermed har vi definert mengden M*. Denne definisjonen kan se grusomt komplisert ut, men jeg tror leseren vil se poenget med den ganske raskt om man sammenholder den med figur 1 og gransker denne figuren litt nøyere.

Vi definerer nå funksjonen f for atomiske setninger av typen "M;t(a,x,w)" ved å sette:

(3.1) f(M;t(a,x,w)) = (<a,x,t,w>ê M*).

Denne definisjonen angir nøyaktig hvordan vi vil tolke dette predikatet som er innført som et primitivt predikat i HT.

Vi definerer mengden B# ved:

B#=d [Mg(<Z,p0,w>: wêA1 & Zêk({s;-1(A1)})) U
Mg(<Z,p0,w>: wêA2 & Zêk({s;-1(A2)})) U
Mg(<Z,p0,w>: wêA3 & Zêk({s;-1(A3)})) U
Mg(<Z,p0,w>: wêA4 & Zêk({s;-1(A4)})) U
Mg(<Z,p0,w>: wêA5 & Zêk({s;-1(A5)})) U
Mg(<Z,p0,w>: wêA6 & Zêk({s;-1(A6)})) U
Mg(<Z,p0,w>: wêA7 & Zêk({s;-1(A7)})) U
Mg(<Z,p0,w>: wêA8 & Zêk({s;-1(A8)})) U
Mg(<s;-1(I),p0,w>: wêI)].

Vi kan dernest definere intepretasjonen f for atomiske setninger av typen"Br(a,x,w)". Dette skjer ved den følgende definisjon:

(3.2) f(Br(a,x,w)) = (<a,x,w>ê B#)

Det gjenstår derfor bare å definere for atomære setninger av typen "P(x)", "Tp(x)" og

"x <;f y". Dette gjør vi ved de følgende stipulasjoner:

(4.1) f(P(x)) = (xê{p0})

(4.2) f(Tp(x)) = (xê{ t1,t2,t3,t4 })

(4.3) f(x<;f y) = (<x,y>ê{<t1,t2>,<t2,t3>,<t3,t4>, <t1,t3>,<t1,t4>,<t2,t4>})

Dermed har vi faktisk definert intepretasjonsfunksjonen f fullstendig slik at det nå skulle være klart at den tilordner enhver formel i L(HT) nøyaktig en og bare en formel i L(E;3).

For å gjøre beviset for Teorem 7.2 fullstendig er det nå nødvendig å vise at f oppfyller kravene (i) - (v) som er nevnt i dette teorem. Når det gjelder kravet (i) skulle dette være temmelig opplagt i lys av definisjonen av f når man husker på punktene (d1) - (d9) overfor. Selve beviset for denne påstand er et trivielt induksjonsbevis på lengden av formlene i L(E,3). Når det gjelder punktene (iii) og (iv) er også disse helt trivielle i lys av (d11) og (d12) ovenfor, samt det faktum at modus ponens og universell generalisering er de eneste slutningsreglene i E;3[R]. Punkt (v) er også trivielt siden vi har at a&b er definert som ¬(a–>¬b). Det følger da ved hjelp av (d10) og (d11) at vi har :

f(a&¬a) = f(¬(a–>¬(¬a)))= ¬f(a–>¬(¬a)) =

¬(f(a) –> f(¬(¬a)) = ¬(f(a) –>¬f(¬a)) = ¬(f(a) –>¬¬f(a)) = f(a)&¬f(a).

Det punktet som gjenstår er derfor (ii). Det er dette som eventuelt er den vanskelige delen. Vi må altså vise for ethvert ikke-logisk aksiom a i teorien HT at f(a) er et teorem i E;3[R]. Vedrørende de logiske aksiomene i HT skulle dette være meget lett å bevise i lys av den måten f er konstruert på. Her overlater vi detaljene til leseren. Når det gjelder de mengde-teoretiske aksiomene i HT skulle dette være klart i lys av punkt (i) ovenfor. Det samme gjelder alle de ikke-aksiomene i E;3. HT er jo nettopp er en utvidelse av denne teori. Det som derfor må gjøres er å vise at f(a) er et teorem i E;3[R] om a er et av de aksiomene vi eksplisitt nevnte i §2, nemlig om a enten er AT 0.1, AT 0.2 , AT 1 - AT 6 eller AT 7. Nå ser man imidlertid at (3.1), (3.2) og (4.1) - (4.3) ovenfor kan oppfattes som definisjoner av hhv "M;t(u,x,w)", "Br(u,x,w)", "P(x)", "Tp(x)" og "x<;f y" i språket til E;3. Det vil derfor være nok om vi kan vise at de nevnte aksiomer om de omformuleres ved hjelp av disse definisjonene til formler i L(E,3) kan vises å være teoremer i E;3[R]. Dette skal vi forsøke å gjøre i det neste avsnittet.

B

(i) Vi skal vise at AT 3 lar seg utlede fra forutsetningene ovenfor.

La oss først vise at man har:

(1) <a,x,w>êB# <-> x=p0 & (EX)(Xê{A1,...,A8} & wêX & X Inkl s(a))

hvis wêA1U...UA8.

Det kan være grunn til å bevise dette siden det ikke er helt opplagt.

Anta <a,x,w>êB#. Da har vi i lys av (3.2):

<a,x,w>ê Mg(<Z,p0,w>: wêAk & Zêk({s;-1(Ak)}))

for noe kê{1,...,8}. Fra definisjonen av uttrykket til høyre for "ê" følger at det finnes Z' og w' slik at (2) <a,x,w>=<Z',p0,w'> & w'êAk & Z'êk({s;-1(Ak)}). Fra dette utledes at (3) a=Z' & x=p0 & w=w'. Disse forhold impliserer imidlertid at

(4) Ak Inkl s(a) og at Akê{A1,...,A8} & wêAk. Dette er fordi vi har Zêk({s;-1(Aj)}) hvis og bare hvis Aj Inkl Z. I sin tur impliserer (3) og (4) høyre side i (1). Fra høyre side i (1) kan man imidlertid også slutte at det må finnes k, Z' og w' slik at (2) holder. Dette og definisjonen (3.2) impliserer så venstre side i (1).

Anta nå at (5) Br(a,x,w). Vi vil da gjerne bevise at Br(Br*(a,x),x,w). Er wê(I–UN/i,1,8/(Ai) har vi at Mg(a: Br(a,x,w)) ={s;-1(I)} i lys av definisjonen av Br og B#. Videre har vi ved hjelp av disse to definisjonene at:

Br*(s;-1(I),x) = s;-1(I).

Det følger at satsen holder i dette tilfellet. Er på den annen side wê UN/i,1,8/(Ai) følger at

x=p0 og at det finnes w og j der a=Z , weAj og Aj Inkl Z . Sett nå L=UN(Mg(X: Xe{A1,...,A8} & X Inkl Z)). Vi tar sikte på å gi et bevis for at (+) s(Br*(a,x))=L. For å bevise inklusjonen mot venstre antar man at w'eL for vilkårlig w'. Da finnes det i lys av definisjonen av L en X' der vi har w'êX & X'ê{A1,...,A8} & X' Inkl Z. Da må det finnes k slik at X'= Ak & Ak Inkl Z. Men dette innebærer at w'êAk & Zêk({s;-1(Ak.)}). Men siden a=Z følger det at Br(a,x,w') etter definisjon (3.2). Mao. har man w'ês(Br*(a,x)). Er på den annen side w'êBr*(a,x) følger at Br(a,x,w') og derfor i lys av definisjon (3.2) at wêAk & Ak Inkl Z' for noe k og Z' der a=Z'. Vi må under disse omstendigheter ha at Z'=Z og derfor at Ak Inkl Z. Men herav følger i lys av definisjonen av L at w'êL. Dette skulle vise at (+) holder om vi antar at (5) holder. Imidlertid har vi at Aj Inkl L & wêAj. Siden L=s(Br*(a,x)) følger da ved hjelp av (3.2): Br(Br*(a,x),x,w). Dette viser at AT 3 kan utledes under de forutsetningene vi har nevnt.

(ii) La oss så se på hvordan AT 0.1 kan utledes. Anta Br(a,x,w). Fra definisjon (3.2) ovenfor har vi da aêk({s;-1(Ai)}) for noe ie{1,...,8}, hvor videre x=p0 og wêAi. Dette innebærer da selvfølgelig at aêU, P(x) og wêI. Dette viser at AT 0.1 holder. Har vi M;t(a,x,w) følger ved hjelp av definisjon (3.1) at tê{t1,...,t3} og x=p0. Videre følger at a=k({s;-1(X)}) hvor X er en av mengdene som er definert i (2.1). Men siden k(d) Inkl U om d er en mengde med utsagn følger åpenbart aêU. At w må være en mulig verden, ie. at weI skulle være opplagt. Dette gir en et bevis for at AT 0.2 holder.

(iii) Siden Mg(t:Tp(t))={t1,...,t4} skulle det være åpenbart at vi har Mng(Mg(t:Tp(t))). Siden vi videre har at Mg(x: P(x)) = {p0} skulle det også være innlysende at Mng(Mg(x: P(x))). Dette følger fordi vi kan bevise eksistensen til en hvilken som helst endelig mengde i E;3 og det er klart at {p0} og {t1,...,t4} er endelige mengder.

(iv) Anta Br(a,x,w) og at wêUN/i,1,8/(Ai). Da følger fra definisjon (3.2) og definisjonen av B# at det må finnes ie{1,...,8} slik at (1) aek({s;-1(Ai)}). Videre må vi ha x=p0 og (2) weAi. Men fra (2) og (3) følger at wêAi Inkl s(k({s;-1(Ai)})) Inkl s(a). Dette i sin tur innebærer at wês(a). I tilfelle wê(I – UN/i,1,8/(Ai)) har vi a=s;-1(I). Satsen holder derfor også i dette tilfellet. Dette viser at vi kan utlede aksiomet AT 1.

(v) La oss nå se om vi også kan utlede AT 2. Dette skulle i og for seg ikke by på noen spesielle problemer. Anta:

(1) zêU & s[SNu(Mg(x:Br(x,y,w)))] Inkl s(z) & wêI & P(y)

Vi ønsker da å vise at Br(z,y,w). Er wê(I – UN/i,1,8/(Ai)) har vi at (2) Br(s;-1(I),y,w) og fra definisjonen av B# samt definisjon (3.2) følger i så fall at : (3) Mg(x: Br(x,y,w)) = {s;-1(I)}. Da følger fra (1) at I Inkl s(z) og derfor at (4) I=s(z). Da har vi i så fall Br(z,y,w) som nettopp er det vi ønsker.

Er på den annen side wêUN/i,1,8/(Ai) har vi i lys av definisjonen av B#, og definisjon (3.2) ovenfor at det må finnes noe i og Z der vi har

(6) a=Z & y=p0 & weAi & Zêk({s;-1(Ai)}).

Vi ønsker nå å bevise at:

(+) s(SNu(Mg(x:Br(x,y,w)))) = Ai

Anta w'êAi for vilkårlig element w'. Anta videre at z' er et vilkårlig element der Br(z',y,w). Da har vi i lys av definisjon (3.2) at det finnes Z' og j slik at jê{1,...,8} der (7) z'=Z' & y=p0 & Z'êk({s;-1(Aj)}) & wêAj. I lys av (7) og (6) kan vi slutte at i=j siden de diverse Ai, i=1,...,8 er innbyrdes disjunkte. Fra dette og (7) følger at :

(8) wêAi Inkl s(Z')=s(z'). Men w' var et element i Ai. Det følger at w'es(z'). vi har nå bevist:

(9) (Az')(Br(z',y,w).->. w'ês(z')). Dette innebærer imidlertid at

(10) w'ê s(SNu(Mg(x:Br(x,y,w)))). Dette viser at inklusjonen mot venstre i (+)

holder. Anta på den annen side at (10) holder for å vise at w'eAi. I lys av (6) har vi at s;-1(Ai)êk({s;-1(Ai)}) & weAi. Fra dette og definisjonen (3.2) og definisjonen av B# følger Br(s;-1(Ai),y,w). Dette og (9) gir en w'ês(s;-1(Ai))=Ai som er det vi ønsker. Dette viser at også inklusjonen mot høyre i (+) holder.

Fra (+) og (1) følger at Ai Inkl s(z). Dette innebærer at zek({s;-1(Ai)}). Sammen med (6) gir dette en: zêk({s;-1(Ai)}) & wêAi. Men dette impliserer i lys av definisjon (3.2) at Br(z,y,w) som er det vi ønsker. Dermed har vi bevist at vi kan utlede AT 2.

Vi har så langt vist at alle grunnsetningene hvor bare predikatene "Tp(x)", "P(x)" og "Br(a,x,w)" er involvert i tillegg til predikatene i E;3 lar seg utlede. Vi skal nå gå videre å se på aksiomet AT 4.

(vi) Anta at (1) M;t(a,x,w) & bêU & s(a) Inkl s(b). Vi ønsker da å bevise at M;t(b,x,w). Fra definisjon (3.1) og definisjonen av M* kan utledes som en generell sats som gjelder for alle entiteter t,a,x og w:

(3) M;t(a,x,w) <->
x=p0 &[(t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h11)})) v
(t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h12)})) v
(t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h111)}) v
(t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h112)}) v
(t=t2 & wê A5U...UA8 & aêk({s;-1(h121)}) v
(t=t2 & wê A5U...UA8 & aêk({s;-1(h122)}) v
(t=t3 & wê A1UA2 & aêk({s;-1(h1111)}) v
(t=t3 & wê A1UA2 & aêk({s;-1(h1112)}) v
(t=t3 & wê A3UA4 & aêk({s;-1(h1121)}) v
(t=t3 & wê A3UA4 & aêk({s;-1(h1122)}) v
(t=t3 & wê A5UA6 & aêk({s;-1(h1211)}) v
(t=t3 & wê A5UA6 & aêk({s;-1(h1212)}) v
(t=t3 & wê A7UA8 & aêk({s;-1(h1221)}) v
(t=t3 & wê A7UA8 & aêk({s;-1(h1222)})]

Nå har vi videre som en setning som holder generelt for alle d at:

(4) (Aa)(Ab)(aêk(d) & s(a) Inkl s(b).->. bêk(d)) om dêPt(U). Men fra (1),(3) og (4) følger M;t(b,x,w) som nettopp er det vi ønsker. Dette viser at også AT 4 kan utledes under de forutsetningene som vi nevnte i avsnitt A.

(vii) I §2 nevnte vi formelen (**). Det bør bemerkes at vi kan vise at (**) ikke holder i den modellen vi har definert. La oss vise hvorfor dette ikke er tilfelle:

Sett a= s;-1(A1U...UA5) og b=s;-1(A5U...UA8). Da har vi at s(Ka,b)=A5. Det fremgår av dette, definisjon (3.1) og definisjonen av M* at vi har M;t1(a,p0,w) og M;t1(b,p0,w) & ¬M;t(K(a,b),p0,w) om wêA5. Dessuten har vi i lys av definisjon (3.2) og definisjonen av B# at Br(K(a,b),p0,w) under forutsetning av at weA5. Dette innebærer at hvis weA5 så har man:

¬(M;t(a,x,w) & M;t(b,x,w) & Br(K(a,b),x,w).->.M;t(K(a,b,),x,w))

Siden A5≠ø viser dette tydelig at (**) ikke holder i modellen.

(viii) Det neste mål vi setter oss er å gi bevis for at AT 5 - AT 7 kan utledes fra de forutsetninger vi nevnte i avsnitt A. For dette formål finner vi det hensiktsmes-sig å gi bevis for endel hjelpesetninger som vi nå gjør rede for. Vi betrakter først den følgende hjelpesetning:

Lemma 7.1: (a) Er wê UN/i,1,8/(Ai) & x=p0 & t=t1 har vi
Bas(C,Q(w,x,t)) <-> C={k({s;-1(h11)}),k({s;-1(h12)})}

(b) Er wê A1U...UA4 & x=p0 & t=t2 har vi
Bas(C,Q(w,x,t)) <-> C={k({s;-1(h111)}),k({s;-1(h112)})}
(c) Er wê A5U...UA8 & x=p0 & t=t2 har vi
Bas(C,Q(w,x,t)) <-> C={k({s;-1(h121)}),k({s;-1(h122)})}
(d) Er wê A1UA2 & x=p0 &t=t3 har vi
Bas(C,Q(w,x,t)) <-> C={k({s;-1(h1111)}),k({s;-1(h1112)})}
(e) Er wê A3UA4 & x=p0 & t=t3 har vi
Bas(C,Q(w,x,t)) <-> C={k({s;-1(h1121)}),k({s;-1(h1122)})}
(f) Er wê A5UA6 & x=p0 & t=t3 har vi
Bas(C,Q(w,x,t)) <-> C={k({s;-1(h1211)}),k({s;-1(h1212)})}
(g) Er wê A7UA8 & x=p0 & t=t3 har vi
Bas(C,Q(w,x,t)) <-> C={k({s;-1(h1221)}),k({s;-1(h1222)})}

Jeg tror at beviset for denne satsen dessverre blir meget langt om det skal gjennomføres i detalj. Det som imidlertid er litt kjedelig er at satsen virker svært opplagt når man studerer figur 1 litt nøyere. Det virker derfor unødvendig å måtte gi det uhyre lange og trettende bevis. Vi innskrenker oss derfor til å bevise det første punkt i denne satsen:

Bevis for Lemma 1: Anta (1) wê UN/i,1,8/(Ai) & x=p0 & t=t1 og dessuten at:

(2) C={k({s;-1(h11)}),k({s;-1(h12)})}.

Vi vil bevise (+) Bas(C,Q(w,x,t1)). Dette innebærer, i lys av definisjonen av "Bas(C,T)", at det må godtgjøres at følgende holder:

(o) CêPt(Pt(U))
(i) (Ax)(xêC.-> (s(SNu(x)) ≠ø)
(ii) C≠ø & C Inkl Rgn(Q(w,x,t1)
(iii) (Ay)[yê Rgn(Q(w,x,t1)).->. (Ex)(xêC & (s(SNu(x)) Inkl s(SNu(y)))]
(iv) (Ax)[xêC.->. -(Ey)(yê Rgn(Q(w,x,t1)) &
s(SNu(y)) SInkl s(SNu(x))]
(v) (Ax)(Ay)(x,yêC & x≠y. –> .s(SNu(x))Ω s(SNu(y)) = ø)

Vi har (3) k({s;-1(h11)}) Inkl U & k({s;-1(h12)}) Inkl U. Fra dette og (2) kan vi åpenbart slutte at (o) holder. Nå har vi om xêC at x enten er k({s;-1(h11)}) eller k({s;-1(h12)}). Siden s(SNu(k({s;-1(h1i)}))) =h1i ≠ø om i=1,2 følger det at også (ii) ovenfor holder.

Fra (2) fremgår det åpenbart at C≠ø. Vi må vise at C Inkl Rgn(Q(w,x,t1), dvs. : (3) C Inkl Mg(k({a}) : M;t1(a,x,w)). Fra definisjon (3.1) og definisjonen av M* fremgår det imidlertid at hvis w oppfyller kravet (1) så har vi M;t1(s;-1(h11),x,w) og M;t1(s;-1(h12),x,w). Fra dette og (2) følger imidlertid (3) ovenfor.

Anta at (4) yê Rgn(Q(w,x,t1) mao. at yê Mg(k({a}) : M;t1(a,x,w)) for et eller annet vilkårlig objekt y. Det finnes i så fall a der y=k({a}) & M;t1(a,x,w). Siden (1) holder følger fra det siste, definisjon (3.1) og definisjonen avM* at :

(5) h11 Inkl s(a). v h12 Inkl s(a). Men fra dette og (2) følger konsekventen i (iii). Dette viser at også (iii) holder.

Det gjenstår bare å vise at (iv) holder. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes x,y slik at :

(6) xêC & yê Rgn(Q(w,x,t1)) & s(SNu(y)) SInkl s(SNu(x))

Fra den andre konjunkten følger da at det finnes a der y=k({a}) & M;t1(a,x,w). Fra dette, definisjon (3.1) og definisjonen av M* følger som ovenfor at

(7) h11 Inkl s(a). v h12 Inkl s(a)

Vi har at (8) s(SNu(y))=s(a) og at (9) s(SNu(x))=h11.v. s(SNu(x))=h12.
Fra (6),(8) og (9) følger (10) s(a) SInkl h11 .v. s(a) SInkl h12. Men fra (7) og (10) ser man at det enten må være slik at h11 SInkl h11.v.h11 SInkl h12 som er umulig, eller at det må være slik at h12 SInkl h11.v.h12 SInkl h12 som likeledes er umulig. Det følger at det ikke kan finnes x,y som oppfyller kravet (6). Fra dette utleder vi :

(Ax)[xêC.->. -(Ey)(yê Rgn(Q(w,x,t1)) & s(SNu(y)) SInkl s(SNu(x))].

Mao. er det slik at også (iv) overfor holder. Når det gjelder kravet (v) skulle det være opplagt at dette holder.

Vi har nå bevist den ene halvdelen av punkt (a) i Lemma 1,dvs.

(11) Er wê UN/i,1,8/(Ai) & x=p0 har vi

C={k({s;-1(h11)}),k({s;-1(h12)})}.->.Bas(C,Q(w,x,t1)).

I lys av Teorem 2.1 i §2 følger imidlertid den andre halvdelen. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (a) i Lemma 1. Nå skulle man imidlertid raskt se at de andre påstandene, (b) - (g), i Lemma 1 bevises på en måte som blir helt analog med det beviset som vi har gitt for (a). Vi overlater derfor det detaljerte bevis for disse punkter til leseren.

Dette avslutter dermed vårt bevis for Lemma 1 som vi derfor anser for fullstendig bevist. **QED**.

Vi trenger også det følgende lemma:

Lemma 7.2. *(Aw')(Aw)(w,w'êA1U...UA8.->. Q(w',p0,t1)=Q(w,p0,t1))*
(Aw')(Aw)(w,w'êA1U...UA4.->. Q(w',p0,t2)=Q(w,p0,t2))
(Aw')(Aw)(w,w'êA5U...UA8.->. Q(w',p0,t2)=Q(w,p0,t2))
(Aw')(Aw)(w,w'êA1UA2.->. Q(w',p0,t3)=Q(w,p0,t3))
(Aw')(Aw)(w,w'êA3UA4.->. Q(w',p0,t3)=Q(w,p0,t3))
(Aw')(Aw)(w,w'êA5UA6.->. Q(w',p0,t3)=Q(w,p0,t3))
(Aw')(Aw)(w,w'êA7UA8.->. Q(w',p0,t3)=Q(w,p0,t3))

Også her synes beviset å måtte bli noe langt å trettende. Imidlertid synes det klart at straks disse hjelpesetningene er etablert er det forholdsvis likefrem å gi bevis for at AT 5 - AT 7 holder.

Hjelpesetningen ovenfor skulle følge lett fra den følgende setning:

Lemma 7.3: (a) (Aw)(wêA1U...UA8 &t=t1 & y=p0.->.
Rgn(Q(w,y,t))=Mg(k({x}): h11 Inkl s(x).v.h12 Inkl s(x)))

(b) (Aw)(wêA1U...UA4 &t=t2 & y=p0.->.
Rgn(Q(w,y,t))=Mg(k({x}): h111 Inkl s(x).v.h112 Inkl s(x)))

(c) (Aw)(wêA5U...UA8 &t=t2 & y=p0.->.
Rgn(Q(w,y,t))=Mg(k({x}): h121 Inkl s(x).v.h122 Inkl s(x)))

(d) (Aw)(wêA1UA2 &t=t3 & y=p0.->.
Rgn(Q(w,y,t))=Mg(k({x}): h1111 Inkl s(x).v.h1112 Inkl s(x)))

(e) (Aw)(wêA3UA4 &t=t3 & y=p0.->.
Rgn(Q(w,y,t))=Mg(k({x}): h1121 Inkl s(x).v.h1122 Inkl s(x)))

(f) (Aw)(wêA5UA6 &t=t3 & y=p0.->.
Rgn(Q(w,y,t))=Mg(k({x}): h1211 Inkl s(x).v.h1212 Inkl s(x)))

(g) (Aw)(wêA7UA8 &t=t3 & y=p0.->.
Rgn(Q(w,y,t))=Mg(k({x}): h1221 Inkl s(x).v.h1222 Inkl s(x)))

Bevis: Vi tar først sikte på å bevise påstand (a). Anta (1) wêA1U...UA8 & t=t1 & y=p0 Anta dessuten at (2) zêRgn(Q(w,y,t)) for vilkårlig z. Da må det finnes a slik at aêC(w,y,t) og hvor z=k({a}). (Se i denne forbindelse definisjonene av "C(w,y,t)" og "Q(w,y,t)" som ble gitt i §2.[3]). Siden aêC(w,y,t) har vi (3) M;t(a,y,w) & z=k({a}). Fra (3) og (1) følger

[3] Vi har pr. definisjon Q(w,y,t)= <k({a})>/aê C(w,y,t)/. Det kan i denne forbindelse bemerkes at <F(x)>/xêA/ er definert ved:

<F(x)>/xêA/ = Mg(<x,F(x)>: xêA).

Det følger fra denne definisjonen at <F(x)>/xêA/ er en funksjon, at domenet til denne funksjonen er A og at verdiområdet til den er Mg(F(x): xêA).

M;t1(a,p0,w). Dette og definisjon (3.1) impliserer i lys av den første konjunkten i (1) at aêk({s;-1(h11)}) v aêk({s;-1(h12)}). Dette impliserer i sin tur at h11 Inkl s(a).v.h12 Inkl s(a). Men dette og den andre konjunkten i (3) innebærer at man må ha zê Mg(k({x}): h11 Inkl s(x).v.h12 Inkl s(x)). Vi har dermed bevist den ene halvdelen av (a). Anta på den annen side at (1) holder og at (4) zê Mg(k({x}): h11 Inkl s(x).v.h12 Inkl s(x)). Fra det siste følger at det finnes a der man har: z=k({a}) & h11 Inkl s(a).v.h12 Inkl s(a). Fra den siste konjunkten i denne formelen, (1), definisjon (3.1) samt definisjonen av M* har vi M;t(a,y,w). Men dette og det at z=k({a}) impliserer i lys av definisjonen av operasjonen Q at zêRgn(Q(w,y,t)). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for det første punktet i hjelpesetningen. Imidlertid bevises de andre punktene i denne satsen på en helt analog måte. Den detaljerte verifikasjon av disse punkter kan derfor overlates til leseren.

Dette avslutter vårt bevis for Lemma 7.3. **QED**.

(ix) Vi skal nå vise at AT 5 holder. Anta derfor at (1) Bas(C,Q(w;1,x,t)) & yêC for vilkårlige entiteter w;1,x,t,y. Fra definisjonen av "Bas(C,T)" følger det at (2) C≠ø og at (3) C Inkl Rgn(Q(w,x,t)). Fra disse to ting følger Rgn(Q(w,x,t)) ≠ø og derfor at det finnes z og a slik at (4) z=k({a}) & M;t(a,x,w). Fra den andre konjunkten i (4) følger videre i lys av definisjon (3.1) at (5) x=p0 & te{t1,...,t3}. Vi må derfor sondre mellom tre tilfelle ettersom t=t1,t=t2 og t=t3:

Tilfelle (a): t=t1. Fra (4),(5), definisjon (3.1) og definisjonen av M* følger da: (6) w;1eA1U...UA8. Fra dette, (1), (5) og Lemma 7.1 følger:

(7) C={k({s;-1(h11)}),k({s;-1(h12)})}. Fra dette og (1) følger i sin tur at

(8) y=k({s;-1(h11)}).v.y=k({s;-1(h12)}). Det er to muligheter:

(I) y=k({s;-1(h11)}). Vi har at h11≠ø og derfor at det finnes noe w;2 der (9) w;2êh11. Herav følger w;2êA1U...UA4 og derfor i lys av definisjon (3.2) og definisjonen av B# at Br(s;-1(h11),x,w;2). Da har vi siden SNu(y)=s;-1(h11) at:

(10) w;2ês(Br*(SNu(y),x)). Siden w;1,w;2êA1U...UA8 følger i lys av Lemma 3:

(11) Q(w:1,x,t1)=Q(w;2,x,t1) . Fra (10) og (11) følger at:

(Ew;2)(w;2 ê I &.w;2ês(Br*(SNu(y),x)) & Q(w;1,x,t1)=Q(w;2,x,t1)). Man ser at AT 5 holder i dette tilfelle.

(II) y=k({s;-1(h12)}). Vi har at h11≠ø og derfor at det finnes noe w;2 der (9) w;2êh12. Herav følger w;2êA5U...UA8 og derfor i lys av definisjon (3.2) og definisjonen av B# at Br(s;-1(h12),x,w;2). Da har vi siden SNu(y)=s;-1(h12) at:

(10) w;2ês(Br*(SNu(y),x)). Siden w;1,w;2êA1U...UA8 følger i lys av Lemma 7.3:

(11) Q(w:1,x,t1)=Q(w;2,x,t1) . Fra (10) og (11) følger at:

(Ew;2)(w;2 e I &.w;2ês(Br*(SNu(y),x)) & Q(w;1,x,t1)=Q(w;2,x,t1)). Man ser at AT 5 holder også i dette tilfelle. Dermed har vi vist at AT 5 holder om t=t1.

Tilfelle (b): t=t2. Fra (4),(5), definisjon (3.1) og definisjonen av M* følger i dette tilfellet at (12) w;1êA1U...UA4 .v. w;1êA5U...UA8. Vi må da skille mellom to undertilfelle:

Tilfelle (b1): w;1êA1U...UA4.Fra dette,(1),(5) og Lemma 1 følger:

(13) C={k({s;-1(h111)}),k({s;-1(h112)})}. Fra dette og (1) følger i sin tur at

(14) y=k({s;-1(h111)}).v.y=k({s;-1(h112)}). Det er nå to muligheter:

(I) y=k({s;-1(h111)}). Vi har at h111≠ø og derfor at det finnes noe w;2 der (15) w;2eh11. Herav følger w;2êA1U...UA4 og derfor i lys av definisjon (3.2) og definisjonen av B# at Br(s;-1(h111),x,w;2). Da har vi siden SNu(y)=s;-1(h111) at:

(16) w;2ês(Br*(SNu(y),x)). Siden w;1,w;2êA1U...UA4 følger i lys av Lemma 7.3:

(17) Q(w:1,x,t2)=Q(w;2,x,t2) . Fra (16) og (17) følger at:

(Ew;2)(w;2 ê I &.w:2ês(Br*(SNu(y),x)) & Q(w;1,x,t2)=Q(w;2,x,t2)). Man ser at AT 5 holder i dette tilfelle.

(II) y=k({s;-1(h112)}). Vi har at h112≠ø, og derfor at det finnes noe w;2 der (18) w;2êh112. Herav følger w;2êA1U...UA4 og derfor i lys av definisjon (3.2) og definisjonen av B# at

Br(s;-1(h112),x,w;2). Da har vi siden SNu(y)=s;-1(h112) at:

(18) w;2ês(Br*(SNu(y),x)). Siden w;1,w;2eA1U...UA4 følger i lys av Lemma 3: (19) Q(w:1,x,t2)=Q(w;2,x,t2) . Fra (18) og (19) følger at:

(Ew;2)(w;2 ê I &.w;2ês(Br*(SNu(y),x)) & Q(w;1,x,t2)=Q(w;2,x,t2)). Man ser at AT 5 holder også i dette tilfelle.

Tilfelle (b2): w;1êA5U...UA8. Dette tilfelle behandles nøyaktig som det ovenfor. Det er bare nødvendig å erstatte "A1U...UA4" med "A5U...UA8","h111" med "h121" og "h112" med "h122" i beviset overfor. Dette skulle vise at vi også kan utlede AT 5 i det tilfelle at t=t2.

Tilfelle (c): t=t3 Fra (4),(5), definisjon (3.1) og definisjonen av M* følger i dette tilfellet at (12) w;1êA1UA2 .v. w;1êA3UA4 .v. w;1êA5UA6 .v.w;1êA7UA8. Vi må i så fall skille mellom fire undertilfelle etter som w;1 er med i A1UA2, A3UA4, A5UA6 og A7UA8. I de enkelte tilfelle kan man vise at AT 5 holder etter det forbilde vi ga under Tilfelle (b). Vi overlater her detaljene til leseren. Dette avslutter dermed vårt bevis for at AT 5 kan utledes under de forutsetningene vi har nevnt.

(x) Vi ønsker nå å vise at AT 6 kan utledes på basis av de forutsetninger vi har gjort. Anta derfor (1) (Ea)M;t(a,x,w). Da finnes det naturligvis noe a der vi har
(2) M;t(a,x,w). Fra dette, definisjon (3.1) og definisjonen av M* følger

(3) x=p0 &[(t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h11)})) v
(t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h12)})) v
(t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h111)}) v
(t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h112)}) v
(t=t2 & wê A5U...UA8 & aêk({s;-1(h121)}) v
(t=t2 & wê A5U...UA8 & aêk({s;-1(h122)}) v
(t=t3 & wê A1UA2 & aêk({s;-1(h1111)}) v
(t=t3 & wê A1UA2 & aêk({s;-1(h1112)}) v
(t=t3 & wê A3UA4 & aêk({s;-1(h1121)}) v
(t=t3 & wê A3UA4 & aêk({s;-1(h1122)}) v
(t=t3 & wê A5UA6 & aêk({s;-1(h1211)}) v
(t=t3 & wê A5UA6 & aêk({s;-1(h1212)}) v
(t=t3 & wê A7UA8 & aêk({s;-1(h1221)}) v
(t=t3 & wê A7UA8 & aêk({s;-1(h1222)})]

Også i dette beviset blir det å sondre mellom en rekke tilfelle. Fra (3) skulle det fremgå at det vil være tilstrekkelig å vise at satsen holder i de følgende syv tilfelle:

(a) Anta (t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h11)})) v
(t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h12)})) I så fall har vi i lys av Lemma 7.1 punkt (a), om C;0={k({s;-1(h11)}),k({s;-1(h12)})}, at Bas(C;0,Q(w,x,t1)) og at C;0≠ø. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(b) Anta (t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h111)}) v
(t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h112)}) I så fall har vi ved hjelp av Lemma 7.1 punkt (b), C;0={k({s;-1(h111)}),k({s;-1(h112)})}, at Bas(C;0,Q(w,x,t2)) og at C;0≠ø. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(c) Anta (t=t2 & wê A5U...UA8 & aêk({s;-1(h121)}) v
(t=t2 & wê A5U...UA8 & aêk({s;-1(h122)}) I så fall har vi ved hjelp av Lemma 7.1 punkt (c), C;0={k({s;-1(h121)}),k({s;-1(h122)})}, at Bas(C;0,Q(w,x,t2)) og at C;0≠ø. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(d) Anta (t=t3 & wê A1UA2 & aêk({s;-1(h1111)}) v
(t=t3 & wê A1UA2 & aêk({s;-1(h1112)}) I så fall har vi ved hjelp av Lemma 7.1 punkt (d), C;0={k({s;-1(h1111)}),k({s;-1(h1112)})}, at Bas(C;0,Q(w,x,t3)) og at

C;0≠ø. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(e) Anta (t=t3 & wê A3UA4 & aêk({s;-1(h1121)}) v
(t=t3 & wê A3UA4 & aêk({s;-1(h1122)}) I så fall har vi ved hjelp av Lemma 7.1 punkt (e), C;0={k({s;-1(h1121)}),k({s;-1(h1122)})}, at Bas(C;0,Q(w,x,t3)) og at C;0≠ø. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(f) Anta (t=t3 & wê A5UA6 & aêk({s;-1(h1211)}) v
(t=t3 & wê A5UA6 & aêk({s;-1(h1212)}) I så fall har vi ved hjelp av Lemma 7.1 punkt (f), C;0={k({s;-1(h1211)}),k({s;-1(h1212)})}, at Bas(C;0,Q(w,x,t3)) og at C;0≠ø. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(g) Anta (t=t3 & wê A7UA8 & aêk({s;-1(h1221)}) v
(t=t3 & wê A7UA8 & aêk({s;-1(h1222)}) I så fall har vi ved hjelp av Lemma 7.1 punkt (g), C;0={k({s;-1(h1221)}),k({s;-1(h1222)})}, at Bas(C;0,Q(w,x,t3)) og at C;0≠ø. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Dette avslutter vårt bevis for at AT 6 holder i modellen.

(xi) Det gjenstår å vise at AT 7 holder i den modellen vi har angitt. Anta derfor for vilkårlige C,w,x, t at (1) Bas(C,Q(w,x,t)). Siden i så fall C≠ø, følger at yêC for noe y, og derfor at y=k({a}) for noe a der vi har (2) M;t(a,x,w). Som i beviset under punkt (ix) har vi fra dette, definisjon (3.1) og definisjonen av M* at:

(3) x=p0 &[(t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h11)})) v
(t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h12)})) v
(t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h111)}) v
(t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h112)}) v
(t=t2 & wê A5U...UA8 & aêk({s;-1(h121)}) v
(t=t2 & wê A5U...UA8 & aêk({s;-1(h122)}) v
(t=t3 & wê A1UA2 & aêk({s;-1(h1111)}) v
(t=t3 & wê A1UA2 & aêk({s;-1(h1112)}) v
(t=t3 & wê A3UA4 & aêk({s;-1(h1121)}) v
(t=t3 & wê A3UA4 & aêk({s;-1(h1122)}) v
(t=t3 & wê A5UA6 & aêk({s;-1(h1211)}) v
(t=t3 & wê A5UA6 & aêk({s;-1(h1212)}) v
(t=t3 & wê A7UA8 & aêk({s;-1(h1221)}) v
(t=t3 & wê A7UA8 & aêk({s;-1(h1222)})]

Det følger selvfølgelig at (4) x=p0. Vi må også nå sondre mellom en rekke tilfelle.

Tilfelle (a): Vi har:

(5) (t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h11)})) v
(t=t1 & wê A1U...UA8 & aêk({s;-1(h12)}))

I dette tilfelle har vi fra (1), (4) og (5) at (6) C={k({s;-1(h11)}),k({s;-1(h12)})} i lys av Lemma 7.1 punkt (a). Fra (5), (6), definisjon (3.2) og definisjonen av B# følger det, om wêA1U...UA4 at Br(s;-1(h11),x,w) og fra dette og (6) følger konsekventen i AT 7. Har vi wêA5U...UA8 følger Br(s;-1(h12),x,w) og derfor også konsekventen i AT 7 i lys av (6). Konklusjonen blir derfor at satsen holder i dette tilfellet.

Tilfelle (b): Vi har:

(7) (t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h111)}) v
(t=t2 & wê A1U...UA4 & aêk({s;-1(h112)})

I dette tilfelle har vi fra (1),(4) og (7) at (8) C={k({s;-1(h111)}),k({s;-1(h112)})} i lys av Lemma 7.1 punkt (b). Fra (7), (8), definisjon (3.2) og definisjonen av B# følger det, om weA1UA2 at Br(s;-1(h111),x,w) og fra dette og (7) følger konsekventen i AT 7. Har vi weA3UA4 følger Br(s;-1(h112),x,w) og derfor også konsekventen i AT 7 i lys

av (8). Konklusjonen blir derfor at satsen holder i dette tilfellet.

Vi overlater nå de resterende tilfelle til leseren fordi disse kan behandles på en måte som er helt analog med den vi har demonstrert i de to tilfellene vi allerede har gjennomgått. Dette avslutter vårt bevis for at AT 7 holder i den modellen vi har beskrevet. Dermed har vi også kommet til veis ende når det gjelder vårt konsistensbevis for teorien HT.

§8 Oppsummering og konklusjon.

I dette arbeidet har vi detaljert beskrevet og formulert første-ordens teorien HT. Denne har blitt definert like "eksakt" som en hvilken som helst annen førs-ordens teori, f. eks. det mengde-teoretiske systemet ZFC. I denne teorien har vi utledet en lang rekke satser for å vise for leseren i allefall en del av det som faktisk lar seg utlede i den. Under dette arbeidet har vi støtt på tre viktige problemer. For det første har vi det problem som består i å formulere selve teorien HT og samle oss såpass om denne oppgaven at man får teorien "ned på papiret". For det andre har vi det problem som består i å komme på, og få ideer til, satser som muligens kan utledes i teorien. Vi har, som man ser, gjort visse anstrengelser i denne retning og formulert en del mulige teoremer. Videre har vi så det problem som består i å gi bevis for de setninger vi har formulert og opprinnelig gjettet på at var riktige. De bevis som er gitt representerer løsningen på disse problemene.

Hva var så poenget med alt dette? Hvilke problemer av viktigere art er det teorien HT, hvis vi hypotetisk tar det for gitt at den er riktig, gir en løsning på? I denne forbindelse kan vi presentere en liste med problemer eller spørsmål som i alle fall utgjør en del av dem teorien gir et svar på: (a) Hva er et handlingsalternativ? (b) Hvilke identitetskriterier er det mulig å formulere for handlingsalternativer? (c) Nøyaktig hva er en handling? (d) Under hvilke omstendigheter kan to handlinger oppfattes som identiske og under hvilke omstendigheter som forskjellige ? (e) Hvordan forholder handlingsalternativer seg til handlinger? (f) Hvordan forholder handlingsalternativer seg til relasjonen M som består av alle de fire-tupler som oppfyller betingelsen "x er et utsagn som beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i den logisk mulige verdenen w" ? (g) Hvordan forholder handlinger seg til relasjonen Br som er mengden av alle de tripler som oppfyller den åpne setningen "x er et utsagn som beskriver noe personen x gjør i verdenen w"? (h) Hvilke logiske lover gjelder for relasjonene M og Br ?

La oss nå avslutningsvis se på hva slags svar teorien gir på disse spørsmål. Når det gjelder det første spørsmålet, om hva et handlingsalternativ er, sier teorien at h er et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis h er et element i en basis C for handlingspotensialet til x ved tidspunktet t i verdenen w, dvs. teori-familien Q(w,x,t) som vi definerte i §2. Dette innebærer som man ser at et handlingsalternativ ifølge HT er en teori, dvs. en mengde med utsagn. Teorien gir altså et helt eksplisitt og tydelig svar på det første spørsmålet. Når det gjelder spørsmålet om identitetskriterier for handlingsalternativer gir teorien en også et helt opplagt svar på dette: To handlingsalternativer h;1 og h;2 er identiske om ethvert utsagn som er et element i det første alternativet også er et element i den utsagnsmengden som utgjør det andre handlingsalternativet og omvendt. Dette innebærer at teorien HT reduserer spørsmålet om identiteten til handlingsalternativer til et spørsmål om identiteten til utsagnsmengder og dermed til et spørsmål om når to utsagn er identiske. Men ifølge HT er to utsagn identiske om de er sanne i nøyaktig de samme mulige verdenene, slik at den også kan sies å gi et svar på dette spørs-målet.

Ifølge teorien HT er en mulig handling et ordnet par <a,x> hvor a er et utsagn som beskriver noe x gjør i en eller annen mulig verden. Dette var den definisjonen som ble gitt i §3 og som der ble meget nøye diskutert. I lys av dette gir teorien helt klart et svar på hva en

handling er. I lys av denne definisjonen av handling ser man også at teorien gir et svar på under hvilke omstendigheter to handlinger er identiske og når de er forskjellige. La oss i forbindelse kalle den første komponenten i en handling h for utsagnskomponenten i h og la oss kalle den andre komponenten for aktøren involvert ved handlingen h. Er da h;1 og h;2 handlinger har vi at h,1 er identisk med h;2 hvis og bare hvis utsagnskomponenten i h;1 er identisk med utsagnskomponenten i h;2 og aktøren involvert i h;1 er identisk med aktøren involvert i h;2. Man ser altså at teorien HT reduserer spørsmålet om identitet mellom handlinger til spørsmålet om identitet mellom utsagn.

Når det gjelder spørsmålet om hvordan handlingsalternativer og handlinger henger sammen gir også teorien HT presis informasjon på dette punkt. Anta h er et handlingsalternativ som står åpent for individet x ved tidspunktet t i verdenen w. I lys av den definisjonen vi tidligere har gitt følger det da at h er et element i en basis C for handlingspotensialet til x ved tidspunktet t i verdenen w dvs. at hêC der Bas(C,Q(w,x,t)). Men fra dette og AT 5 følger det at konjunksjonen av utsagnene i h, dvs. SNu(h) er et utsagn som beskriver noe x gjør i en eller annen logisk mulig verden w'. Dette innebærer, dersom vi setter h;1=<SNu(h),x>, at h;1 vil være en mulig handling som x utfører i verdenen w'. Denne observasjonen kan formuleres ved å si at for ethvert handlingsalternativ h som står åpent for x ved tidspunktet t er <SNu(h),x> en mulig handling som det er logisk mulig at x utfører, dvs. en handling som x utfører i en eller annen mulig verden.

Hvordan forholder handlinger seg til relasjonen Br? Dette fremgår direkte av den definisjonen vi ga. En handling er i følge HT et ordnet par <a,x> der a er et utsagn som beskriver noe x gjør i en eller annen verden w, dvs. et ordnet par <a,x> som er slik at det finnes en logisk mulig verden w hvor vi har <a,x,w>êBr. Teorien gir derfor et presist svar på det syvende spørsmålet ovenfor.

Tilsvarende når det gjelder spørsmålet om hvordan handlingsalternativer forholder seg til relasjonen M. Også dette fremgår av selve definisjonen av handlingsalternativ, som vi ikke behøver å gjenta nå, samt de satser som vi har vist som sier noe om forholdet mellom relasjonene Alt og M.

Når det gjelder de lover som gjelder for relasjonene M og Br gir teorien HT, som man har sett, en god del informasjon. Vedrørende relasjonen Br er det først og fremst de ikke-logiske aksiomene AT 0 – AT 3 som fastlegger de grunnleggende egenskapene av logisk karakter til denne relasjonen. Tar man for seg disse aksiomene ser man at AT 0.2 krever at dersom a er et utsagn som beskriver noe x gjør i verdenen w så skal a være et utsagn, x en person og w en mulig verden. Kaller vi mengden Mg(a: Br(a,x,w)) for livsløpsbeskrivelsen til individet x i verdenen w, sier altså dette aksiomet at elementene som inngår i livsløpsbeskrivelsen til en person i en mulig verden er utsagn. Når det gjelder AT 1 sier dette aksiom at alle utsagnene i den totale livsløpsbeskrivelse til en person i en mulig verden w er sanne i denne verden w. Et utsagn som er usant i en verden w kan altså ikke beskrive noe et individ x gjør i denne verden. Videre uttrykker AT 2 den tanke at livsløpsbeskrivelsen til et individ x i en mulig verden w er lukket under logisk konsekvens i den strenge forstand at ethvert utsagn hvis sannhetsmengde inkluderer sannhetsmengden til konjunksjonen av alle de utsagn som inngår i livsløpsbeskrivelsen til x i w selv er med i denne livsløpsbeskrivelse. Mao. er X en vilkårlig delmengde av Mg(a: Br(a,x,w)), der X i prinsippet godt kan være overtellbar, og har vi for et eller annet utsagn y at s(SNu(X)) Inkl s(y), så har vi også at yêMg(a: Br(a,x,w)). Endelig sier AT 3 at dersom a er et utsagn som beskriver noe x gjør i verdenen w så vil også selve det utsagn at a beskriver noe x gjør være et utsagn som beskriver noe x gjør.

Når det gjelder relasjonen M er det bare to aksiomer som bare sier noe om denne relasjonen og ikke angir noen sammenhenger mellom denne og Br. Det dreier seg om AT 4 som sier at dersom utsagnet a beskriver et forhold det står i individet x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w og utsagnet b er en logisk konsekvens av a så beskriver

også b et forhold det står i x's makt å realisere reltivt til t i verdenen w. Dessuten har vi AT 6 som i det vesentlige sier at hvis et eller annet utsagn beskriver noe det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w så finnes det en ikke-tom basis for handlingspotensialet til x relativt til t i verdenen w. Når det gjelder de andre aksiomene i teorien, AT 5 og AT 7, angir disse visse sammenhenger som består mellom relasjonen M på den ene side og relasjonen Br på den annen side. Man ser altså at teorien HT helt eksplisitt inneholder en hel rekke med generelle setninger av logisk karakter om relasjonene M og Br som samlet sier forholdsvis meget om disse. Når man så tar i betraktning de teoremene vi har utledet synes det rimelig å konkludere med at teorien HT, forutsatt selvfølgelig at den er riktig, gir en et ganske detaljert innblikk i hvilke lover som gjelder for disse to relasjonene M og Br.

Vi har med denne gjennomgåelsen av de svar teorien HT gir på spørsmålene (a) - (h), som vi presenterte ovenfor, gitt et sammendrag av det som etter vår mening er det mest vesentlige som har blitt oppnådd i dette arbeid.

***

Appendix I

Notasjon

§0 Bemerkninger om notasjonen som benyttes i dette skrift.

I dette tillegget gir vi hovedsakelig en oversikt over den logiske og mengde-teoretiske notasjon som brukes i dette skrift. Vi anbefaler at leseren tar en kopi av disse sidene og har dem oppslått ved siden av skriftet ved gjennomlesningen. Dette vil spare en for en masse bryderi med stadig å slå opp når man støter symboler som virker ukjente.

For det første bruker vi den følgende notasjon i forbindelse med subskripter og superskripter: La a og b være to uttrykk. Uttrykket som man får ved å føye til b som en subskript til a betegner vi med "a;b". Vi setter altså et semikolon mellom det uttrykket b som skal føyes til som subskript og det uttrykket a som b er sub-skript til. Vi bruker paranteser for å fjerne mulige flertydigheter i denne for-bindelse. Er a,b og c tre uttrykk vil "a;(b;c)" betegne det uttrykket vi får når man føyer til uttrykket c som en subskript til b og dernest føyer dette resultatet til som en subskript til a.

Når det gjelder superskripter benytter vi oss av en lignende regel. Er a og b to uttrykk betegner "a`b" det uttrykket vi får når b skrives som en superskript til uttrykket a. Også her brukes paranteser for å fjerne flertydigheter. Ønsker man f.eks. å føye til uttrykket "x+2" som en superskript til uttrykket "F(x)" skriver vi dette på den følgende måte: "F(x)`(x+2)". Vil man skrive "(x+2),f(y)" som en superskript til f.eks. uttrykket a skriver man "a`((x+2),f(y))". Er a,b og c tre uttrykk vil a;(b`c) betegne det uttrykket som man får når man føyer til "b`c" som en subskript til a. "b`c" betegner i sin tur det uttrykket som resulterer når man føyer til c som en superskript til uttrykket b.

Når det gjelder vår bruk av variabeltegn bemerker vi følgende. De offisielle variabeltegnene er tegnene i rekken "x", "y", "z", "w", "x'", "y'", "z'", "w'", "x'",... ad inf. Men i en rekke situasjoner er det gunstig å tillate seg å bruke spesielle variabeltegn som bare har objektene i visse mengder som verdier. Vi skal f.eks. bruke "w;1", w;2", "w;3" , ... etc. som variabeltegn som bare har mulige verdener som verdier. Videre bruker vi "t;0", "t;1", "t;2", ... som variabeltegn som bare tar elementer i klassen av tidspunkter som verdier. Vi nevner også at vi hvis det ikke ellers fremgår av sammenhengen at vi mener noe annet at tegnene "m", "n", "k", "j", og "i" , eventuelt påført talltegn som subskripter vil bli brukt som variabeltegn som tar naturlige tall som verdier.

Når det gjelder den notasjon vi benytter gir den følgende liste en fullstendig oversikt. Til venstre i hver rad på denne listen er oppført det symbolske uttrykk som benyttes som forkortelse for det uttrykket som er oppført til høyre.

§1 Oversikt over de logiske symboler i setningslogikken og predikatlogikken.

Symbol:	Hvilket uttrykk symbolet brukes som forkortelse for:
p -> q	"Hvis p så q"
¬p	"Ikke p"
-p	"Ikke p"
p&q	"p og q"
p h&h q	"p hvis og bare hvis q"
p <-> q	"p hvis og bare hvis q"
pvq	"p eller q"
(Ax)	"For alle objekter x er det slik at"

(Ex)	"For minst et objekt x er det slik at"
x=y	"x er identisk med y"

§2 Oversikt over de viktigste symbolene i mengdelæren.

xêy	"x er et element i mengden y"
Mg(x:F(x))	"Mengden av alle objekter x som er slik at F(x)"
c(x)	"Komplementet til mengden y"
Sn(x,y)	"Snittet av mengden x og mengden y"
xΩy	"Snittet av mengden x og mengden y"
xUy	"Unionen av mengden x og mengden y"
Un(x,y)	"Unionen av mengden x og mengden y"
x Inkl y	"x er inkludert i y"
x SInkl y	"x er strengt inkludert i y"
<x,y>	"Det ordnete par som har x som første og y som den andre komponent
UN(x)	"Unionen av alle elementene i mengden x"
SN(x)	"Snittet av alle elementene i mengden x"
{x}	"Mengden som bare inneholder elementet x"
V	"Den universelle mengde"
ø	"Nullmengden"
SN/x,n,m/(F(x))	"Snittet av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper tallrekken fra og med n til og med m"
SN/xêA/(F(x))	"Snittet av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper elementene i mengden A"
UN/x,n,m/(F(x))	"Unionen av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper tallrekken fra og med n til og med m"
UN/xêA/(F(x))	"Unionen av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper elementene i mengden A"
Prod(x,y)	"Det cartesiske produkt av mengden x og mengden y"
xXy	"Det cartesiske produkt av mengden x og mengden y"
SN/x,j,∞/(F(x))	"Snittet av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper rekken av naturlige tall fra og med j og oppover i det uendelige"
Pt(x)	"Potensmengden til x"
Rel(x)	"x er en relasjon"
Func(x)	"x er en funksjon"
Dom(x)	"Domenet til x"
Rgn(x)	"Verdiområdet til x"
Cor(x)	"x er en korrelasjon"
f ‘x	"Verdien til funksjonen f for argumentet x"
f(x)	"Verdien til funksjonen f for argumentet x"
(dx)(f(x))	"Den funksjonen som til ethvert objekt x tilordner verdien til funksjonen f for argumentet x"
(dxêC)(f(x))	"Den funksjonen som til ethvert objekt x som er med i mengden C tilordner f(x)"
f: x -> y	"f er en funksjon som avbilder mengden x inn i mengden y"
f: x -(1-1)->y	"f er en en-entydig funksjon som avbilder mengden x inn i mengden y"

f: x-(1-1,på)->y	"f er en en-entydig funksjon som avbilder mengden x på mengden y"
F"x	"Bildet av mengden x over relasjonen F"
Mng(x)	"x er en mengde"
x-y	"Differansen mellom mengde x og mengden y"
Cnv(x)	"Den konverse relasjon til x"
x`-1	"Den konverse relasjon til x"
Ur(x)	"x er et urindivid"
x « y	"x er av mindre mektighet enn y"
x «= y	"x er mindre eller likemektig med y"
x ≈ y	"x har samme mektighet som y"
Ca(x)	"Kardinaltallet til mengden x"
∑/xeA/(F(x))	"Summen av diverse tallene F(x) ettersom x gjennomløper mengden A"
∏/xeA/(F(x))	"Produktet av de diverse tallene F(x) ettersom x gjennomløper mengden A"
Nat	"Mengden av de naturlige tall"
Rat	"Mengden av de rasjonale tall"
Reell	"Mengden av de reelle tall"
RE	"Mengden av de reelle tall"
Exp(x,y)	"Mengden av alle funksjoner hvor domenet er identisk med mengden y og hvor verdiområdet er inkludert i mengden x"

§3 Oversikt over de viktigste symbolene som brukes i teorien om presise deskriptive utsagn

SNu(x)	"Det utsagnet som er konjunksjonen av utsagnene i utsagnsmengden x"
UNu(x)	"Det utsagnet som er disjunksjonen av utsagnene i utsagnsmengden x"
C(x,y)	"Kondisjonalutsagnet som har utsagnet x som antesedent og utsagnet y som konsekvent"
K(x,y)	"Konjunksjonen av utsagnet x og utsagnet y"
D(x,y)	"Disjunksjonen av utsagnet x og utsagnet y"
Neg(x)	"Negasjonen av utsagnet x"
s(x)	"Sannhetsmengden til utsagnet x"
True(w,x)	"w er en logisk mulig verden hvor utsagnet x er sant"
U	"Mengden av alle presise deskriptive utsagn"
I	"Mengden av alle logisk mulige verdener"
MV(x)	"x er en logisk mulig verden"
MI(x)	"x er et logisk mulig individ"
s;-1(x)	"Det utsagnet som har mengden x som sin sannhetsmengde"
s	"Funksjonen som til ethvert utsagn tilordner utsagnet det som er sannhetsmengden til det."
k(x)	"Konsekvensmengden til utsagnsmengden x"
LK(x,y)	"x er en logisk konsekvens av utsagnet y"
LKm(x,y)	"x er et utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden y"
Cons(x)	"x er en konsistent utsagnsmengde"

§4 Oversikt over de viktigste symbolene som brukes i egenskapsteorien E;3

D	"Mengden av alle mulige individer"
At(x,y)	"x er en egenskap av grad y"
H(x,y,w)	"x har egenskapen y i verdenen w"
Ekst;w(x)	"Ekstensjonen til egenskapen x i verdenen w"
Ekst(x)	"Ekstensjonsfunksjonen til egenskapen x"
Da;n(x,y)	"Disjunksjonen av den n-ære egenskapen x og den n-ære egenskapen y"
Ka;n(x,y)	"Konjunksjonen av den n-ære egenskapen x og den n-ære egenskapen y"
Nega;n(x)	"Negasjonen av den n-ære egenskapen x"

§5 Oversikt over de viktigste symbolene som brukes i teorien HT

M;t(a,x,w)	"Utsagnet a beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w"
Br(a,x,w)	"Utsagnet a beskriver et forhold personen x realiserer i verdenen w"
Bas(C,T)	"C er en mengde med teorier som utgjør en basis for teorifamilien T"
Q(w,x,t)	"Handlingspotensialet til personen x ved tidspunktet t i verdenen w"
C(w,x,t)	"Handlingsmulighetene til personen x ved tidspunktet t i verdenen w"
Alt;w(h,x,t)	"h er et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t i verdenen w"
Bef(a,h)	"a er et utsagn som gir en fulstendig beskrivelse av handlingsalternativet h"
Re;w(h,x,t)	"h er et handlingsalternativ som personen x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w"
MHand(h)	"h er en mulig handling"
Hand*(h,w)	"h er en handling som utføres i verdenen w"
Hand(h,x,w)	"h er en handling som personen x utfører i verdenen w"
q;(x,h)	" Det utsagnet som beskriver det forhold at x utfører handlingen h"
p;(x,a,w)	"Den handlingen som utføres av x i verdenen w og som beskrives av utsagnet a"

Referanser

Referanser

Bergstrøm [1], Bergstrøm, Lars, *The alternatives and consequences of actions* , 1966, Stockholm

Bergstrøm [2], Bergstrøm, Lars, *Reply to Prawitz* , Theoria, 1968, vol. 34, pp. 163—170

Chellas[1], Chellas, Brian F., *The Logical Form of Imperatives*, Perry Lane Press Standford California, (1969)

Prawitz [1], Prawitz, Dag, *A discussion note on utilitarianism* , Theoria, 1968, vol. 34, pp. 76—84

Prawitz [2], Prawitz, Dag, *Utilitarism och alternativen til handlingar* , Sanning Dikt Tro. Til Ingemar Hedenius den 5 april 1968, 1968 Uppsala

Prawitz [3], Prawitz, Dag, *The alternatives to an action* , Theoria, 1970, Vol. 36, pp. 116—126

Rognes [1], Rognes, Morten , *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og og mengdelære* , (1985) Upublisert maskinskrevet manuskript.

Rognes [2], Rognes, Morten , *En teori om presise deskriptive utsagn* , (1985) Upublisert maskinskrevet manuskript.

Rognes [3], Rognes, Morten , *Endel grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn* , (1987) Upublisert maskinskrevet manuskript.

Rognes [4], Rognes , Morten , *Egenskaper. Del I* , (1986) Upublisert maskinskrevet manuskript.

Rognes [5], Rognes, Morten , *Egenskaper. Del II. Bevis for teoremer* , (1987) Upublisert maskinskrevet manuskript.

Rognes [6], Rognes, Morten , *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier* , (1985) , Upublisert maskinskrevet manuskript.

Rognes [7], Rognes, Morten , *Et sammendrag av en teori om egenskaper og presise deskriptive utsagn* , (1985) Upublisert maskinskrevet manuskript.

Rognes [8], Rognes, Morten , *En generell teori om etiske normer* , (1990) Upublisert maskinskrevet manuskript.

Rognes [9], Rognes, Morten , *Determinisme og frihet*, (1993) Upublisert maskinskrevet manuskript.

Wright [1], Wright, Georg Henrik von, *An Essay in Deontic Logic*, Acta Philosophica Fennica, Fasc XXI, (1968)

Wright [1], Wright, Georg Henrik von, *On the logic of norms and actions*, I "New studies in deontic logic" ed. Risto Hilpinen, North Holland, (1981)

Åqvist [1], Åqvist, Lennart, *Improved formulations of act-utilitarianism* , Noûs, vol. 3, 1969, pp. 299—323